Vlastní vektory a PageRank

Poznámky k semináři AKTI podzim 2023/24

Michal Krupka

11. října 2023

1 Vlastní hodnoty a vlastní vektory

(také *eigenvalue*, *eigenvector*; *vlastní číslo*)

Máme čtvercovou matici A typu $n \times n$, $A = (a^i_j)$, $i, j = 1 \ldots, n$ (horní index je řádkový, dolní sloupcový):

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

Nenulový vektor $v \in \mathbf{R}^n$ se nazývá *vlastní vektor natice A s vlastní hodnotou* λ, jestliže

$$A \cdot v = \lambda \cdot v. \tag{1}$$

Číslo λ může být komplexní, budeme se ale bavit o případech, kdy $\lambda \in \mathbf{R}$. Dvojici (λ, v) nazveme *vlastní pár* matice A.

Matice $n \times n$ souvisejí přímo s lineárními transformacemi vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$. Proto lze hovořit i o vlastních hodnotách a vlastních vektorech těchto lineárních transformací. Je dobré nad tím takto uvažovat, protože nám to pomůže pochopit význam význam vlastních hodnot a vlastních vektorů.

Příklad 1.1. Vlastní hodnoty a vektory některých matic:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda = 1,$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = 0$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \end{pmatrix}, \lambda = 2.$$

Ve všech případech je vlastních vektorů nekonečně mnoho, matice A_1 a A_2 mají i více vlastních hodnot. U matice A_3 je zase, v jistém smyslu (v jakém?), „více" vlastních vektorů.

Základní vlastnosti

1. Je-li (λ, v) vlastní pár, $r \neq 0$, pak (λ, rv) je též vlastní pár.

2. Jsou-li (λ, u), (λ, v) vlastní páry s touž vlastní hodnotou, pak libovolná nenulová lineární kombinace vektorů u a v je opět vlastní vektor s vlastním číslem λ. Společně s nulovým vektorem tedy vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbf{R}^n$, Říká se mu*vlastní podprostor*.

Důkazy těchto dvou poznatků jsou snadné, zkuste si je udělat.

Příklad 1.2. Je užitečné zkusit odhadnout a pak ověřit (pomocí matice), jak vypadají vlastní hodnoty a vektory základních lineárních transformací v $\mathbf{R}^2$: rotace, osové a středové souměrnosti, zvětšení daným koeficientem, zvětšení dvěma různými (i nulovými) koeficienty v různých osách, zkosení.

Tvrzení 1.1. *Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

Otázka: Kolik může mít daná matice různých vlastních čísel? Lze snadno odvodit z předchozího tvrzení.

2 Přesný výpočet

Pro jednotkovou matici E_n typu $n \times n$,

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

platí $E_n \cdot v = v$, takže pravá strana (1) je rovna

$$\lambda \cdot (E_n \cdot v) = (\lambda E_n) \cdot v,$$

přičemž

$$\lambda E_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Rovnici (1) nyní můžeme upravit takto:

$$(A - \lambda E_n) \cdot v = 0, \tag{2}$$

kde na pravé straně je nulový vektor. Aby nenulový vektor v splňující (2) existoval, musí mít matice $A - \lambda E_n$ lineárně závislé sloupce, a tedy být singulární:

$$\det(A - \lambda E_n) = 0, \tag{3}$$

Když si zkusíte napsat levou stranu v konkrétním případě, zjistíte, že na levé straně (3) je polynom stupně n vzhledem k λ a hledaná vlastní čísla jsou tedy jeho kořeny. Vlastní vektory pak najdeme vyřešením soustavy vzniklé dosazením vlastního čísla do (2).

Příklad 2.1. Najdeme vlastní hodnoty a vlastní vektory první matice z Příkladu 1.1. Máme

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

To je rovno nule jedině pro $\lambda = 1$, což je tedy jediné vlastní číslo dané matice. Jeho dosazením do (2) pro neznámý vektor $v = (x, y)$ dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastními vektory příslušnými (jediné) vlastní hodnotě $\lambda = 1$ jsou tedy vektory

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

pro libovolné nenulové číslo x.

Jako cvičení si můžete vypočítat vlastní hodnoty a vektory dalších matic z Příkladů 1.1 a 1.2.

3 Stochastické matice

Čtvercová matice A, $A = (a^i_j)$, $i, j = 1 \ldots, n$ se nazývá *Stochastická*, jestliže

1. $a^i_j \geq 0$ pro každé i, j,
2. $(1 \ldots 1) \cdot A = (1 \ldots 1)$.

Druhá podmínka říká, že součet prvků každého sloupce je roven jedné.

Matice A se nazývá *stochastická kladná*, když navíc $a^i_j > 0$ pro každé i, j.

Tvrzení 3.1 (První poznatek o stochastických maticích)**.** *Číslo* 1 *je vždy vlastním číslem stochastické matice A.*

Důkaz. Součet hodnot v každém sloupci matice $A - E_n$ je roven nule, takže tato matice má lineárně závislé řádky. Má tedy i lineárně závislé sloupce, takže existuje nenulový vektor v takový, že $(A - E_n) \cdot v = 0$ neboli $A \cdot v = v$. □

V následujícím budeme používat následující vzorec pro normu (délku) vektoru:

$$\|v\|_1 = \left|v^1\right| + \cdots + \left|v^n\right|.$$

Funkce přiřazující vektoru v jeho délku $\|v\|_1$ splňuje obecné podmínky pro délku vektoru:

1. $\|v\|_1 \geq 0$, kde rovnost nastává právě pro $v = 0$,
2. $\|rv\|_1 = |r|\|v\|_1$,
3. $\|v + w\|_1 \leq \|v\|_1 + \|w\|_1$ (tzv. *trojúhelníková nerovnost*).

A **Důležitá nerovnost** pro stochastické matice (ověřte si):

$$\|A \cdot v\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a^i_j v^j \right| \leq \sum_i \sum_j \left| a^i_j v^j \right| = \sum_j \sum_i \left| a^i_j v^j \right| = \sum_j \left| v^j \right| = \|v\|_1 .$$

Při výpočtu jsme použili základní vlastnosti absolutní hodnoty, komutativitu sčítání a fakt, že matice A je stochastická. Ze základních vlastností absolutní hodnoty také plyne, že rovnost nastane právě když jsou všechny složky vektoru v nezáporné nebo nekladné.

Tvrzení 3.2 (Druhý poznatek o stochastických maticích)**.** *Pro každé vlastní číslo λ matice A platí $|\lambda| \leq 1$.*

Důkaz. Plyne z **Důležité nerovnosti**: jestliže $A \cdot v = \lambda v$, pak totiž $\|A \cdot v\|_1 = |\lambda|\|v\|_1$. Kdyby teď bylo $|\lambda| > 1$, pak by $\|A \cdot v\|_1 > \|v\|_1$, což je s **Důležitou nerovností** ve sporu. □

Tvrzení 3.3 (Třetí poznatek o stochastických maticích)**.** *Jestliže u a v jsou vlastní vektory kladné stochastické matice A pro vlastní číslo $\lambda = 1$, pak jsou lineárně závislé. Každý vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu* 1 *má tedy dimenzi 1.*

Důkaz. Bude delší, rozdělíme ho na dvě části.

1. Ukážeme, že matice A má vždy vlastní vektor v pro vlastní hodnotu 1 takový, že všechny jeho složky jsou kladné a jejich součet je 1 (tedy $\|v\|_1 = 1$).

Začneme libovolným vlastním vektorem u příslušným vlastní hodnotě 1.

Kdyby byla každá jeho složka nezáporná, jsou určitě všechny kladné (stačí se podívat, jak funguje násobení matice vektorem). Vektor v tedy dostaneme vydělením vektoru u jeho normou.

Kdyby byla každá jeho složka nekladná, můžeme ho vynásobit -1 a pokračovat s výsledným vektorem (jehož složky jsou nezáporné).

Zbylý případ, tedy že vektor u má nějakou složku kladnou a jinou zápornou, nemůže nastat, protože pak by v **Důležité rovnosti** pro matici A a vektor u platila ostrá nerovnost, tedy

$$\|A \cdot u\|_1 < \|u\|_1$$

a vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru u by nemohlo být rovno 1.

2. Mějme dva vlastní vektory u a v příslušné vlastnímu číslu 1, které jsou lineárně nezávislé a splňují podmínku z předchozího bodu. Položme $w = u - v$. Vektor w je opět vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 (jako lin. kombinace takových vlastních vektorů). Přitom ale součet jeho složek je 0 a je určitě nenulový (protože vektory u a v jsou lin. nezávislé). Proto musí obsahovat složku kladnou a složku zápornou. To ale, jak jsme už ukázali, není možné. $\square$

Třetí poznatek lze zformulovat takto: *Je-li matice A stochastická kladná, pak má právě jeden vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$, který má všechny složky kladné a jejich součet je* 1.

4 Přibližný výpočet

Vlastní vektor kladné stochastické matice A příslušný vlastnímu číslu 1 lze vypočítat přibližně následující tzv. *metodou mocnin.*

Začneme vektorem

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n. \end{pmatrix}$$

Vektor má všechny složky kladné a jejich součet je 1. Proto podle **Důležité nerovnosti**, ve které ovšem, jak víme, v tomto případě nastává rovnost, má vektor

$$v_2 = A \cdot v_1$$

opět všechny složky kladné se součtem 1. Obecně položíme pro $n > 1$

$$v_n = A \cdot v_{n-1}.$$

Je dokázáno (nebudeme důkaz dělat), že posloupnost vektorů v_n konverguje k vektoru v, který je (jak víme, jediným) vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu 1 , který má všechny složky kladné a jejichž součet je 1. Tento vektor samozřejmě splňuje

$$A \cdot v = v.$$

Metodu mocnin a její varianty lze použít i na jiné matice než kladné stochastické. Těmito zobecněními se nebudeme zabývat.

5 n-tý člen Fibonacciho posloupnosti

Ukážeme, jak lze pomocí uvedené teorie odvodit obecný vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

Posloupnost je dána předpisem

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_{n-1} + a_n \quad (n \geq 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Maticový tvar obecného vzorce:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Opakovaným dosazováním do pravé strany dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Číslo a_n tedy najdeme na prvním řádku a druhém sloupci matice M^n, kde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Umocňování matic obecně není jednoduché, ale pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů je lze významně zjednodušit. Především si všimneme, že *diagonální matice* se umocňují snadno:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \tag{8}$$

(Zkuste pro $n = 1, 2, 3$, obecný důkaz pak indukcí.).

Dalším krokem bude nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů naší matice M:

$$\det(M - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Kvadratická rovnice $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ má dva kořeny,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

což jsou hledaná vlastní čísla. Příslušné vlastní vektory nalezneme popsaným způsobem, vyřešením soustav rovnic:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

(sami můžete dojít k řešení, které vypadá hodně jinak, ale pokud jste neudělali chybu, budou vaše vlastní vektory násobky těchto).

Lineární transformace daná maticí M v kanonické bázi

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

tedy zobrazuje vektory ležící ve směru vektoru v_1 na jejich λ_1-násobek a vektory ležící ve směru vektoru v_2 na jejich λ_2-násobek. V bázi β složené z vektorů v_1 a v_2 by tedy měla mít diagonální matici

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Matici A lze vypočítat ze vztahu

$$A = P^{-1} \cdot M \cdot P, \tag{9}$$

kde P je matice přechodu od báze α k β (a inverzní matice P^{-1} je tedy maticí přechodu od β k α) — pochopení vyžaduje znalosti o matici přechodu a matici lineárního zobrazení.

Matice P má ve sloupcích vektory báze β vyjádřené v báci α. Protože v bázi α jsou souřadnice vektorů rovnou jejich složky, snadno odvodíme, že

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici můžeme vypočítat některou ze známých metod. Vyjde

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

(lze zkontrolovat vynásobením maticí P).

Nyní můžeme také ověřit platnost vztahu (9).

Matici M lze nyní vypočítat z matice A:

$$M = P \cdot A \cdot P^{-1},$$

ale hlavně, teď získáváme jednoduchou formuli pro hledanou její n-tou mocninu:

$$M^n = P \cdot A^n \cdot P^{-1}$$

(ověřte!), ve které mocninu matice A již umíme vypočítat snadno.

Nalézt pravou horní složku matice M^n teď obnáší pouze vynásobení tří známých matic. Její hodnota, a tedy hodnota n-tého členu Fibonacciho posloupnosti vyjde

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

6 PageRank

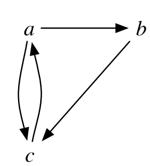
Je to původní metoda Googlu, jak ohodnotit stránky na webu podle jejich významu daném popularitou. je založena na modelu chování uživatelů.

Základní metoda vychází z těchto předpokladů:

1. Hodnota stránky roste tím, čím více stránek na ni odkazuje …
2. … a čím větší hodnotu tyto odkazující stránky mají …
3. … a čím méně odkazů z nich vede.

Hodnota stránky odpovídá počtu uživatelů, kteří na ní jsou, pokud u nich předpokládáme náhodné klikání na odkazy. Počet uživatelů na stránce je roven počtu uživatelů, kteří na ni přišli z jiných stránek přes odkazy s tím, že se mezi odkazy rovnoměrně rozdělili.

Příklad 6.1. Pro takovýto web



musí platit

$$\begin{aligned} a &= c \\ b &= \tfrac{1}{2}a \\ c &= \tfrac{1}{2}a + b, \end{aligned}$$

kde písmeny a, b, c značíme ohodnocení stránek z obrázku.

Soustava má vždy nulové řešení a násobek libovolného řešení je opět řešení. Například

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{a samozřejmě} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jsou všechno řešení. Kromě nulového dávají všechna stejnou informaci. Důležité nejsou hodnoty složek výsledného vektoru, ale jen poměr mezi nimi.

Volíme takové řešení, že $a + b + c = 1$, tedy

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

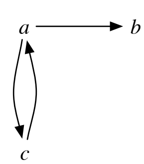
Ohodnocení stránek vytvořené tímto způsobem můžeme chápat jako číslo, na kterém se ustálí počet uživatelů, když náhodně klikají na odkazy. Stabilní stav nastane, když je na stránce a 40 % uživatelů, na b 20 % a na c 40 %.

Původní soustavu můžeme přepsat takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{10}$$

Označme matici vlevo A. Vidíme, že řešením je její vlastní vektor pro vlastní hodnotu 1. Matice je stochastická, takže podle prvního poznatku (Tvrzení 3.1) nenulové řešení existuje. Můžeme ho zvolit tak, že $a + b + c = 1$.

Příklad 6.2. Matice A ovšem stochastická být nemusí. Upravme předchozí příklad:



Příslušná soustava rovnic

$$a = c$$
$$b = \tfrac{1}{2}a$$
$$c = \tfrac{1}{2}a$$

nemá kromě nulového žádné řešení. Z maticového zápisu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{11}$$

vidíme, že matice stochastická není, má nulový sloupec. To je způsobeno tzv. *koncovou stránkou* b.

Koncové stránky (na webu je jich údajně většina) způsobují v našem modelu problém, protože uživatelé z nich nemají kam jít a v dalším kroku na žádnou stránku nepřejdou, ale z webu zmizí. Tak se bude celkový počet uživatelů na webu snižovat až k nule. PageRank stránek dle naší definice neexistuje.

Řešením je upravit definici, aby matice byla vždy stochastická. Tím se náš model současně přiblíží realitě. Zavedeme pravidlo, že uživatel, který je na koncové stránce, se v dalším kroku přesune na libovolnou stránku.

Příklad 6.3. Matice z předchozího příkladu se tak změní na

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je stochastická a podle Tvrzení 3.1 tedy nenulové řešení příslušné soustavy existuje.

To platí obecně: pro naši upravenou definici je už zaručeno, že všem webovým stránkám lze přiřadit ohodnocení.

Neřešený ovšem ještě zůstává problém jednoznačnosti řešení. Snadno lze nalézt příklad webu, pro který najdeme dva kvalitativně rozdílné vektory stránkových ohodnocení. Například:

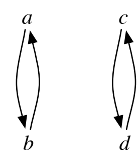
Příklad 6.4. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má dva různé lineárně nezávislé vlastní vektory pro vlastní hodnotu 1 s jednotkovým součtem složek. Například:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Snadno najdete další příklady; vlastní podprostor vlastní hodnoty 1 je dvourozměrný. Této matici odpovídá web, jehož graf je nesouvislý:



Pro obecnou stochastickou matici totiž nemáme zaručeno, že její vlastní podprostor pro vlastní hodnotu 1 je jednorozměrný, neboli, že pro ni existuje jediný vektor stránkových ohodnocení (vlastní vektor s nezápornými složkami s jednotkovým součtem).

To je zaručeno pro *kladnou* stochastickou matici (Tvrzení 3.3).

Definici stránkového ohodnocení ještě jednou (naposledy) upravíme. Poslední verze povede ke kladné stochastické matici a navíc se opět více přiblíží reálnému chování uživatelů. Zavedeme pravidlo, že uživatel z dané (nekoncové) stránky nepostupuje vždy přes odkazy, ale s jistou malou pravděpodobností (používá se 15 %) přejde náhodně na libovolnou jinou stránku.

Příklad 6.5. Výsledná kladná stochastická matice pro web z Příkladu 6.2 je

$$A = 0{,}85 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} + 0{,}15 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Uvedený způsob tedy vede vždy k jednoznačnému stránkovému ohodnocení. K jeho nalezení se používá metoda mocnin z části 4.

Zápočtové úkoly

Řešení budu posuzovat po domluvě na osobní konzultaci.

1. Dokažte Tvrzení 1.1.

2. Uveďte příklad souvislého grafu, jehož matice má dva lineárně nezávislé vlastní vektory pro vlastní hodnotu 1, podobně jako v Př. 6.4.