



Polomnožiny definované výpočtem

Aktuální témata z informatiky

poznámky k semináři, verze z 19. listopadu 2025

Budeme používat pojmy z knihy *Nová infinitní matematika: II. Nová teorie množin a polomnožin* od Petra Vopěnky.

1 Příliš dlouho běžící program

Vezměme program napsaný v jazyce Python:

```
n = 0
while True:
    print(n)
    n = n + 1
```

který po spuštění na počítači postupně tiskne přirozená čísla:

```
0
1
2
⋮
```

protože program tiskne čísla do nekonečna, za přibližně minutu ztratíme trpělivost a program vypneme:

```
⋮
26747418
26747419
```

Program vytiskl celá čísla od nuly po 26747419. Programátor však dopředu neví, kdy uživatel ztratí trpělivost a program vypne. Přirozeně se ale může ptát, jak dlouho může napínat trpělivost uživatele. V našem případě to znamená se ptát, jaká čísla program vytiskne, než uživatel ztratí trpělivost a program vypne. Jistě nulu vytiskne a nějaké obří číslo, řekněme 10^{20} , se nikdy na výstupu neobjeví. I kdyby se tisk čísel nezpomalil, právě uvedené číslo by se objevilo na výstupu za více než milion let. Zvažme pravidlo tvrdící, že s každým číslem vytiskne program i jeho následníka. Je toto pravidlo pravdivé? Protože program vytiskne nulu, použitím právě uvedeného pravidla získáme, že vytiskne i jedničku. Dalším použitím pravidla odvodíme, že vytiskne i dvojku. Po delším dokazování bychom odvodili, že vytiskne i číslo dvacet. Protože čísla po řekněme sto tisíc program vytiskne okamžitě, usoudíme, že používání zmíněného pravidla je bezpečné a prohlásíme ho za pravdivé.

Nechť X je třída všech čísel, které program stihne vytisknout, než uživatel ztratí trpělivost a program vypne. Z výše provedených úvah vyplývá, že $0 \in X$, $10^{20} \notin X$ a že jestliže $n \in X$, pak $n + 1 \in X$. Třída X není ostře vymezená. Kdyby byla, pak by byla množinou a existovalo by největší číslo n , které se v

X nachází, ale jeho následník již ne. Jenže podle našeho pravidla pokud n je v X , pak i následník n je v X . Dostáváme spor. Tedy X není množina. Třída $[10^{20}]$ všech přirozených čísel menších než 10^{20} je ostře vymezená a je tedy množinou. Protože X je neostře vymezená podtřída množiny $[10^{30}]$, je X polomnožinou. Polomnožina X se chová podobně jako polomnožina konečných přirozených čísel FN. Z pohledu vykonávaného programu je můžeme dokonce ztotožnit. Číslo 10^{20} pak bude nekonečné.

Podobně bychom mohli pro jistý program uvažovat polomnožinu vstupů, u kterých program okamžitě vypočítá výsledek. Okamžitostí myslíme tak malou časovou délku, kterou člověk nemůže postřehnout. Například u programu počítající prvočíselnou faktORIZACI zadaného přirozeného čísla můžeme uvažovat polomnožinu čísel, pro které program spočítá faktORIZACI okamžitě.

2 Oblouha

Vezměme obrázek:



z něhož chceme získat tu část, která zobrazuje modrou oblohu. Začneme reprezentací obrázku v nové teorii množin. Obrázek má šířku 602 pixelů a výšku 864 pixelů. Počátek kartézské soustavy souřadnic bude vlevo nahoře. Osa x bude směřovat doprava a osa y dolů. Souřadnice pixelů tedy můžeme reprezentovat

jako uspořádané dvojice $\langle x, y \rangle$, kde $x \in [602]$ a $y \in [864]$. Množinu $[602] \times [864]$ všech souřadnic si označme P . Barvy budeme reprezentovat v RGB modelu trojicemi $\langle r, g, b \rangle$, kde $r, g, b \in [256]$. Množinu všech barev $[256]^3$ označme C . Obrázek je pak funkcí f s definičním oborem P a oborem hodnot pod C .

Zvolme mezi barvami v RGB barvu $c = \langle 102, 127, 171 \rangle$ odpovídající modři oblohy:



Nechť d je funkce definovaná na množině C^2 předpisem

$$d(\langle r_1, g_1, b_1 \rangle, \langle r_2, g_2, b_2 \rangle) = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (g_2 - g_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Funkce d měří podobnost barev. Čím nižší je funkční hodnota, tím jsou zadané barvy podobnější. Tento způsob měření podobnosti barev je velmi primitivní a pro vážnější úvahy o barvách bychom nahradili model RGB modelem CIELAB a podobnost v něm měřili metodou CIEDE2000.

Funkce d je množina. Označme číslo $\vartheta = 2^{60} = 1152921504606846976$, které v našem programu prohlásíme za nekonečno. Tedy pro nás nyní je $\text{FN} \subseteq [\vartheta]$. Přestože obzor není pevně svázán s nějakým číslem, pro výpočetní účely je výhodné jej přesně stanovit. Například zvolme, že obzor je přibližně 2^{50} . Jednotkou v měření podobnosti barev pro nás bude úsilí, které je potřeba vynaložit, abychom uznali dvě barvy za podobné. Tedy ϑ je nekonečné úsilí.

Definujeme funkci t_0 s doménou $[\vartheta]$ předpisem

$$t_0(\alpha) = 5 + \log_2(\alpha + 1) \cdot \frac{145}{60}$$

pro $\alpha \in [\vartheta]$. Platí $t_0(0) = 5$ a $t_0(\vartheta - 1) = 150$. Parciální $t_0|_{\text{FN}}$ označme t . Funkce t_0 je množinové prodloužení funkce t . Funkce t pro konečné přirozené číslo n udávající úsilí dává toleranci $t(n)$ v měření podobnosti barev. Čím blíže jsme obzoru, tím je tolerance větší.

Pro $n \in \text{FN}$ definujeme množinu

$$P_n = \{\langle x, y \rangle \in P; d(f(\langle x, y \rangle), c) \leq t(n)\}.$$

Nechť F je funkce s doménou FN definovaná předpisem

$$F(n) = f|_{P_n}.$$

Množiny $F(n)$ jsou podmnožiny obrázku f . Níže jsou některé z nich zobrazené.

$F(0)$

$F(15)$

$F(255)$

$F(32767)$



Funkce F je stabilní a jistě pro každá $m \leq n$ je $F(m) \subseteq F(n)$. Označme

$$X = \bigcup \text{rng}(F).$$

Polomnožina X je σ -třída a F je její vytvářecí funkce. Polomnožina X představuje pixely obrázku barvy modré oblohy. Abychom si udělali představu, jak posloupnost $\{F(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ směřuje k obzoru, nakreslíme některé její prvky do jednoho obrázku tak, že pozdější prvky budou mít větší průhlednost. Konkrétně nakreslíme přes sebe obrázky $F(2^0 - 1), F(2^1 - 1), \dots, F(2^{50} - 1)$:



Tím jsme získali představu o tvaru polomnožiny X . Zvolme dále jasné oranžovou barvu $c_2 = \langle 255, 164, 28 \rangle$:



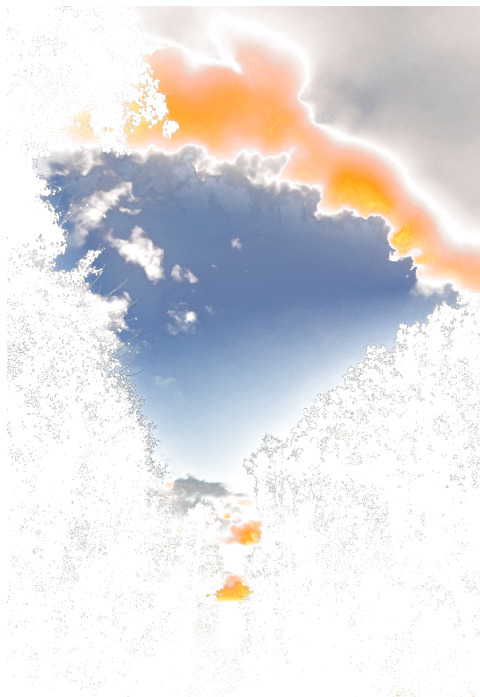
a podobně jako v případě modré barvy označme Y σ -třídou s vytvářecí funkcí G . Tvar polomnožiny oranžových pixelů:



Položme

$$K(n) = F(n) \cup G(n).$$

Funkce K je vytvářecí funkcí σ -třídy $X \cup Y$, která je polomnožinou všech oranžových nebo modrých pixelů:



Polomnožinu pixelů, které nejsou ani oranžové ani modré, obdržíme jako rozdíl $Z = f \setminus (X \cup Y)$, což je zbytková π -třída s vytvářecí funkcí H definovanou předpisem

$$H(n) = f \setminus (X(n) \cup Y(n)).$$

Obrázek polomnožiny $f \setminus (X \cup Y)$:



Zbytková π -třída Z dává vyniknout jevům, které jsme si na původním obrázku nevšimli, protože byly zastíněny výraznými jevy oranžové a modré barvy modelované polomnožinami X a Y . Na obloze si tak můžeme povšimnout opomenuté světle modré barvy nebo cihlově červené barvy ukazující se při přechodu od oranžové k modré barvě.

3 Zápočtový úkol

Zvolme dvě kladná čísla w a h označme $u = [256]^3 \times ([w] \times [h])$. Nechť X je σ -třída taková, že $X \subseteq u$ a X je funkce. Dokažte, že existuje množina f taková, že $f \subseteq u$, f je funkce, $\text{dom}(f) = [w] \times [h]$ a $X \subseteq f$.