



Neostře vymezené části bitmapového obrázku

Aktuální témata z informatiky

poznámky k semináři, verze z 16. října 2026

Vycházíme z knihy *Nová infinitní matematika: II. Nová teorie množin a polomnožin* od Petra Vopenky. Aby byly následující úvahy srozumitelné i bez její znalosti, jsou na vhodných místech uvedeny nezbytné definice převzaté z knihy.

Zaměříme nejprve pozornost na podstatu toho, jak je nám okolní svět dáván zrakem. Když se rozhlédneme kolem sebe, vidíme různé objekty, jako jsou stoly, židle, stromy, mraky. Vyberme si nějaký objekt a pozorujme, jak je vůbec možné, že jej vidíme. Zjistíme, že vybraný objekt zaujímá určité místo ve viditelném okolí, které je vyplněno barevnou plochou. Nejjasněji si to uvědomíme, když se pokusíme objekt namalovat — je to právě barevná plocha, kterou přenášíme na plátno.

Pozorujme nyní barevnou plochu odpovídající nějakému objektu. Téměř nikdy není plocha vyplněna jedinou barvou. Většinou se skládá z různých jednobarevných ploch. Pozorujeme-li jejich skladbu, vyjde najevo, že některé sousední jednobarevné plochy jsou od sebe ostřeji oddělené, kdežto jinde jednobarevná plocha plynule přechází v sousední. Po zaměření pozornosti na jedinou jednobarevnou plochu, se po chvíli stává, že jsme na ní schopni rozlišit různé odstíny její barvy a tak se dříve jednobarevná plocha rozpadne na několik menších barevných ploch. Dílčí barevná plocha se opět po důkladném prozkoumání může skládat z dalších částí. Naznačené dělení barevných ploch na menší bude z důvodu omezení našich rozlišovacích schopností stále obtížnější.

Vezměme nějakou barevnou plošku, kde už si nejsme jisti, zda ji dokážeme rozložit. Stále ale nemusí být vyplněna jednoduše jedinou barvou. Spíše většinou se nám bude ploška jevit tak, že má nějakou texturu. Bude nám připadat, že kdybychom měli lepší rozlišovací schopnosti, dokázali bychom i tuto plošku opět rozdělit na menší, které by odpovídaly částem textury. O tom se můžeme přesvědčit tak, že se prostě k barevné plošce přiblížíme. Z našeho původního pohledu toho však schopni nejsme.

Představme si, že se čas okolního světa zastaví, ale že jsme schopni pohybem očí měnit náš pohled. Kolem sebe nyní vidíme strnulý obraz, který se na okrajích ztrácí. Ostře vymezenou část takto získaného obrazu. Například tak, že se podíváme z okna a vezmeme jen tu část, která se nachází uvnitř rámu. Ostře vymezený obraz bude barevnou plochou s vlastní skladbou barevných ploch a plošek.

I jednoduše barevnou plochu jsme schopni dále rozkládat na části a to díky její rozloze. Jsme například schopni rozdělit nějaký modrý obdélník na dvě poloviny. Ani takové dělení však není ostré. O místech kolem dělící čáry si nebudeme jisti, do které z polovin náleží.

Uvažujme posloupnost barevných ploch takovou, že jejím prvním prvkem je celý obraz a každý další člen vznikl jako část předchozího. Přitom je lhostejné, zda jsme k vydělení použili barvu nebo rozlohu plochy. Počáteční členy této posloupnosti budou zřetelné. Například uvažujme členy odpovídající: celému obrazu, zahradě, rostlině a květináči, květináči. Jak však půjdeme v posloupnosti ploch stále dál k menším a menším plochám, bude jejich zřetelnost upadat. Pokračujme v příkladu barevných ploch odpovídající: červené části květináče, středové oblasti červené části květináče, středové oblasti světle červené části květináče, ... Přestože toho nejsme schopni, můžeme předpokládat, že takové dělení by bylo možné prodloužit až k drobné barevné plošce, ke které však nikdy nedohlédneme.

Předpokládané drobné plošky, ke kterým nedohlédneme, nazveme **barevnými atomy**. Právě ony podloží obraz a budou se podílet na barvě ploch, ke kterým dohlédneme. Na rozdíl od barevných ploch si přisvojíme schopnost jednotlivé barevné atomy od sebe ostře oddělovat. Nechť w značí množinu všech

barevných atomů, které tvoří obraz. Vzhledem k omezení našeho vnímání postačí, aby množina w byla z klasického pohledu konečná. Počet barevných atomů je však tak velký, že z přirozeného pohledu se bude jevit jako nekonečný. Všechny množiny zmíněné v dalším textu budou z klasického pohledu konečné.

Vezměme nějakou barevnou plochu X . Ta vymezuje barevné atomy, které do ní náleží. **Třídou** rozumíme seskupení objektů, které vykládáme jako objekt. Pro třídy budeme používat pojmy, které běžně používáme pro množiny. Například řekneme, že třída X je **podtřídou** třídy Y (značení $X \subseteq Y$), jestliže Y obsahuje každý prvek třídy X . Barevnou plochu X můžeme považovat za třídu jí vymezených barevných atomů. **Množinou** rozumíme třídu, která je ostře vymezená. Zpětně můžeme ověřit, že w je množina podle právě uvedené definice. Vezmeme seskupení barevných atomů, které tvoří obraz, a vyložíme jej jako třídu. Protože obraz je ostře vymezen, jde o množinu. Barevná plocha X není ostře vymezená. (Pokud pomíneme hraniční případy, kdy za barevnou plochu vezmeme celý obraz w nebo prázdnou množinu.) Důvodem je, že až k barevným atomům náš zrak nedohlédne. Nejsme tedy schopni o každém atomu rozhodnout, zda je prvkem X , nebo není. Neostře vymezenou třídu, která je podtřídou nějaké množiny nazýváme **polomnožinou**. Protože X je neostře vymezená třída, která je podtřídou množiny w , jde o polomnožinu.

Uvažujme nějakou modrou plochu X , která je obklopena jinak barevnou plochou. Jak jsme výše zdůvodnili, hranice plochy X je nutně neostrá. Není nutné, aby modř plochy byla jednodušší. Plochu X se můžeme pokusit zachytit postupným vytvářením jejích ostře vymezených částí. Neostrost však způsobí, že tento postup nemůže být nikdy ukončen. Pro zpřesnění uvedeného postupu si nejprve zavedeme několik pojmů.

Přirozenými čísly rozumíme čísla $0, 1, 2, \dots$ ubíhající do nekonečna. Člověk se přirozených čísel zmocňuje tak, že je mu dána nula a umožněno, aby ke každému číslu, které drží, získal jeho následníka (přičetl k němu číslo jedna). Tento postup můžeme samozřejmě urychlovat pomocí různých operací jako jsou sčítání a násobení. Jistě se shodneme, že je zde nějaké ohromné přirozené číslo, ke kterému se člověk nikdy nedopočítá. Idealizujme nyní výpočetní schopnosti člověka. To znamená, že takto idealizovaný člověk sice počítá rychleji, než libovolný reálný člověk, ale stále musí přirozená čísla dobývat od nuly. Přirozené číslo nazvěme **konečné**, jestliže se k němu takto idealizovaný člověk dopočítá. Třídou všech konečných čísel označme FN. Písmena m, n označují konečná přirozená čísla. Protože ani námi idealizovaný člověk neobsáhne všechna přirozená čísla, sále zde bude nějaké číslo γ , které nebude konečné, bude tedy **nekonečné**. Množinu všech přirozených čísel menších než přirozené číslo α označme $[\alpha]$.

Třída FN nemůže být ostře vymezena. Kdyby byla ostře vymezena, byla by třída FN z klasického hlediska konečnou množinou a jako taková by musela mít největší prvek. Označme si jej n . Jenže $n + 1$ je také konečné číslo, ale $n + 1 \notin \text{FN}$, což je spor. Třída FN je tedy neostře vymezena. Protože $\text{FN} \subseteq [\gamma]$ je FN polomnožinou.

Binární relací rozumíme třídu, jejíž každý prvek je uspořádaná dvojice. **Definičním oborem** relace R rozumíme třídu $\text{dom}(R)$ všech X , k nimž existuje Y takové, že $\langle Y, X \rangle \in R$. **Oborem hodnot** relace R rozumíme třídu $\text{rng}(R)$ všech Y , k nimž existuje X takové, že $\langle Y, X \rangle \in R$. Řekneme, že F je **funkce**, jestliže je F relace a pro každé $\langle Y, X \rangle \in F$ a $\langle Z, X \rangle \in F$ je $Y = Z$. Je-li F funkce, $\langle Y, X \rangle \in F$, pak píšeme též $Y = F(X)$. Necht A je třída, jejíž každý prvek je třídou. **Sjednocením třídy** A rozumíme třídu $\bigcup A$, pro niž platí: Objekt X je prvkem třídy $\bigcup A$ právě tehdy, když existuje třída Y taková, že platí $X \in Y \in A$.

Vraťme se nyní k polomnožině X představující neostře vymezenou modrou plochu. Polomnožinu X můžeme zachytit funkcí F s definičním oborem FN, kde $F(n)$ je množina pro každé n . Množina $F(n)$ představuje určitou ostře vymezenou část barevné plochy X . K zachycení polomnožiny X stačí zvolit F tak, aby

$$X = \bigcup \text{rng}(F).$$

Tyto úvahy nás vedou k jistému významnému druhu tříd. Pro jejich zavedení bude potřeba se seznámit s několika pojmy.

Abstraktní prvoobjekty jsou objekty, jejichž vnitřní náplň je vyprázdněná; jsou to již jen objekty. Barevné atomy po odhlédnutí od jejich smyslu můžeme považovat za abstraktní prvoobjekty. Tvrdou množinou rozumíme množinu, na jejíž vnitřní stavbě se nepodílí žádná polomnožina. Přesněji **tvrdou**

množinou typu 1 rozumíme množiny abstraktních prvoobjektů a množiny čísel. **Tvrdé množiny typu n** , kde $n \neq 0$, jsou množiny, jejichž prvky jsou množiny menších typů než n , abstraktní prvoobjekty, čísla a jejich uspořádané dvojice, trojice, ... Řekneme, že množina u je **tvrdá množina**, jestliže existuje n takové, že u je tvrdá množina typu n . Například množina w je tvrdá, ale jednoprvková množina $\{FN\}$ tvrdá není. Je-li F funkce, A třída, pak **parcializací** relace R na třídu A rozumíme třídu $R|A$ všech $\langle Y, X \rangle$, pro něž platí $\langle Y, X \rangle \in R$ a $X \in A$. Řekneme, že funkce F je **stabilní**, jestliže $\text{dom}(F) = FN$ a pro každé n je $F|n$ tvrdá množina. Výše popsaná funkce zachycující ostré podoby modré barvy je stabilní.

Řekneme, že X je **σ -třída**, jestliže pro nějakou stabilní funkci F takovou, že pro každé n je $F(n)$ množina, je $X = \bigcup \text{rng}(F)$. Například výše zmíněná modrá plocha je σ -třída.

Lemma 1. *Nechť F je stabilní funkce taková, že pro každé n je $F(n)$ množina. Potom funkce F_+ definovaná na polomnožině FN předpisem*

$$F_+(n) = \bigcup \text{rng}(F|n)$$

je stabilní, pro $n \leq m$ je $F_+(n) \subseteq F_+(m)$ a

$$\bigcup \text{rng}(F_+) = \bigcup \text{rng}(F).$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že funkce F_+ je stabilní. Nechť $\langle u, m \rangle \in F_+|n$. Stačí ukázat, že u je tvrdá množina. Platí $u = F_+(m) = \bigcup \text{rng}(F|m)$. Ze stability F plyne, že $F|m$ je tvrdá množina, tedy i $\text{rng}(F|m)$ je tvrdá množina. Množina u musí být tvrdá, protože je sjednocením konečně mnoha tvrdých množin.

Dokážeme, že pro $n \leq m$ je $F_+(n) \subseteq F_+(m)$. Nechť $X \in F_+(n)$. Platí $X \in \bigcup \text{rng}(F|n)$. Tedy existuje $k < n$ takové, že $X \in F(k)$, ale $n \leq m$ tedy $X \in F_+(m)$.

Na závěr ukážeme $\bigcup \text{rng}(F_+) = \bigcup \text{rng}(F)$. Máme $X \in \bigcup \text{rng}(F_+)$ právě tehdy, když existuje n takové, že $X \in F_+(n) = \bigcup \text{rng}(F|n)$ právě tehdy, když existuje n takové, že $X \in F(n)$ právě tehdy, když $X \in \bigcup \text{rng}(F)$. $\square$

Podle předchozího lemmatu můžeme navíc o funkci F z definice σ -třídy předpokládat, že $F(m) \subseteq F(n)$ pro každá $m \leq n$. V takovém případě říkáme, že F je **vytvářející funkce σ -třídy** X .

1 Bitmapový obrázek

Z každého barevného atomu můžeme abstrahovat jeho umístění a obdržet **atomické místo**. Množinu všech atomických míst obsazených barevnými atomy v množině w označíme w_1 a nazveme **prostor míst**. Každá barevná plocha X tak zaujímá nějaké místo, které je podtřídou prostoru míst w_1 . Podobně můžeme z barevného atomu abstrahovat jeho barvu a získat **atomickou barvu**. Předpokládáme, že existuje množina w_2 všech možných atomických barev. Nazveme ji **prostor barev**. Barvy barevných atomů budou prvky množiny w_2 . Barevný atom jednoznačně určuje atomické místo l a atomickou barvu b a také naopak je jimi určen, proto můžeme barevný atom reprezentovat uspořádanou dvojicí $\langle b, l \rangle$. Protože každé atomické místo je obsazené právě jedním barevným atomem, který má právě jednu barvu, můžeme množinu barevných atomů w považovat za funkci s definičním oborem w_1 a oborem hodnot w_2 .

IRac označuje množinu všech racionálních čísel, která lze vyjádřit jako $\frac{\alpha}{\beta}$, kde $\alpha, \beta \in [\gamma]$ a $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 1$. Řekneme, že **racionální číslo** x je **konečné**, jestliže existují m, n taková, že $n \neq 0$ a absolutní hodnota x je rovna $\frac{m}{n}$.¹

Předpokládejme, že náš ostře vymezený obraz je čtvercový. Pak jistě můžeme položit w_1 rovno IRac². Tedy atomické pozice budou uspořádané dvojice jistých racionálních čísel z jednotkového intervalu. Použitím vhodného modelu barev (například RGB) můžeme ztotožnit prostor barev s IRac³. Obraz w pak bude funkcí s definičním oborem IRac² a oborem hodnot, který bude podtřídou množiny IRac³.

¹Zde je použita zjednodušená definice z knihy *Nová infinitní matematika: III. Reálná čísla a jejich diskretizace* od Petra Vopěnky.

Abychom teorii mohli použít pro zachycení bitmapového obrázku je nutné polomnožinu FN vhodně zkrátit. Například můžeme stanovit, že nekonečné číslo γ bude už jeden milion. Konkrétní čtvercový bitmapový obrázek pak můžeme reprezentovat funkcí w . Barevné atomy v množině w budou odpovídat jednotlivým pixelům obrázku. Pokud by obrázek měl nedostatečné rozlišení, můžeme chybějící pixely dodat metodou interpolace. Funkce s definičním oborem FN, jejíž obor hodnot je podtřída obrázku w , můžeme na počítači reprezentovat nekonečnými proudy nebo nekonečnými iterátory. Vraťme se k výše uvažované neurčitě vymezené modré ploše. Uživatel by dostal nekonečný proud jejích ostře vymezených podob, ze kterého by si mohl vybrat podoby vhodné pro konkrétní účel.

2 Část obrázku vymezená zadanou barvou

Nechť R je relace a A třída. Pak **obrazem třídy A při relaci R** rozumíme třídu $R^{-1}A$ všech Y , pro něž existuje uspořádaná dvojice $\langle Y, X \rangle \in R$ taková, že $X \in A$. **Inverzní relací** k relaci R rozumíme relaci R^{-1} takovou, že pro každé objekty X, Y je $\langle X, Y \rangle \in R^{-1}$ právě tehdy, když je $\langle Y, X \rangle \in R$. **Vzorem třídy A při relaci R** rozumíme třídu $R^{-1}A$.

Tvrzení 1. *Nechť R je relace, která je tvrdou množinou, Y je σ -třída a G je její vytvářející funkce. Potom též vzor třídy Y při relaci R je σ -třída a funkce F určená vztahem*

$$F(n) = R^{-1}G(n)$$

je její vytvářející funkce.

Důkaz. Dokážeme, že G je stabilní funkce. Protože R i $G(n)$ je tvrdá množina, je i $R^{-1}G(n)$ tvrdou množinou pro každé n .

Dokážeme, že $R^{-1}Y = \bigcup \text{rng}(F)$. Nechť $x \in R^{-1}Y$. Poté existuje $y \in Y$ takové, že $\langle y, x \rangle \in R$. Protože $Y = \bigcup \text{rng}(G)$, existuje n takové, že $y \in G(n)$, tedy $x \in R^{-1}G(n) = F(n)$ a tedy $x \in \bigcup \text{rng}(F)$. Nechť naopak $x \in \bigcup \text{rng}(F)$. Poté existuje n takové, že $x \in F(n) = R^{-1}G(n)$. Tedy existuje $y \in G(n)$ takové, že $\langle y, x \rangle \in R$. Proto $y \in Y$ a tedy $x \in R^{-1}Y$.

Pro $n \leq m$ dokážeme, že $F(n) \subseteq F(m)$. Nechť $x \in F(n) = R^{-1}G(n)$. Poté existuje $y \in G(n)$ takové, že $\langle y, x \rangle \in R$, ale G je vytvářející funkce σ -třídy a proto $G(n) \subseteq G(m)$. Tedy $y \in G(m)$ a proto $x \in R^{-1}G(m) = F(m)$. $\square$

Tvrzení 2. *Nechť R je relace, která je tvrdou množinou, X je σ -třída a G je její vytvářející funkce. Poté parcializace relace F na třídu X je σ -třída a funkce H určena předpisem*

$$H(n) = R|G(n)$$

je její vytvářející funkce.

Modré barvě odpovídá v prostoru barev σ -třída $Y \subseteq w_2$ obsahující všechny atomické barvy, které považujeme za modré. Protože Y není ostře vymezeno, je Y polomnožinou. Obrázek w je tvrdou relací a tedy vzor Y při w je podle předchozího tvrzení σ -třída $X = w^{-1}Y \subseteq w_1$, která bude odpovídat místu vyplněného modrou barvou. Parcializací obrázku w na X obdržíme barevnou plochu $Z = w|X$ obsahující všechny barevné atomy s modrou barvou. Tedy stručně Z je modrá část obrázku. Podle Tvrzení 2 je Z σ -třída. Pokud je Z neprázdné a není rovno celému obrázku, jedná se o polomnožinu.

Přístup si demonstrováme na konkrétním obrázku w :



Prostor barev w_2 bude odpovídat RGB modelu. Přesněji trojice $\langle r, g, b \rangle \in \mathbb{IRac}^3$ udává barvu atomu, kde r je intenzita červené, g zelené a b modré složky. Zvolme atom barvy $c = \langle \frac{102}{255}, \frac{127}{255}, \frac{171}{255} \rangle$ odpovídající konkrétnímu odstínu modři oblohy:



Nechť d je funkce s definičním oborem $(w_2)^2$ určená předpisem

$$d(\langle r_1, g_1, b_1 \rangle, \langle r_2, g_2, b_2 \rangle) = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (g_2 - g_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Funkce d měří podobnost barev. Čím nižší je funkční hodnota, tím jsou zadané barvy podobnější.

Definujeme funkci T s definičním oborem FN předpisem

$$T(n) = \frac{150 - \frac{145}{\frac{n}{100} + 1}}{255}.$$

Platí $T(0) = \frac{5}{255}$, $T(n) \leq T(m)$ pro $n \leq m$, $T(n) < \frac{150}{255}$ for libovolné n . Funkce T pro konečné přirozené číslo n udává toleranci $T(n)$ v měření podobnosti barev.

Definujeme zobrazení G s definičním oborem FN tak, že položíme

$$G(n) = \{c' \in w_2; d(c', c) \leq T(n)\}.$$

Každé $G(n)$ vymezuje ostrou podobu modři oblohy určené tolerancí $T(n)$.

V prostoru barev je samotná modř oblohy reprezentována σ -třídou $Y = \bigcup \text{rng}(G)$. Funkce G je vytvářející funkcí σ -třídy Y . Protože Y není ostře vymezeno, jedná se o polomnožinu. Podle Tvzení 1 je funkce F s definičním oborem FN určená předpisem

$$F(n) = w^{-1} \circ G(n)$$

vytvářející funkcí σ -třídy $X = w^{-1}Y$. Podle Tvzení 2 je funkce H s definičním oborem FN určena předpisem

$$H(n) = w|F(n)$$

vytvářející funkce σ -třídy $Z = w|X$.

Každá množina $H(n)$ představuje ostře vymezenou část obrázku obarvenou ostře vymezenou podobou modří oblohy.

$H(0)$

$H(1)$

$H(5)$

$H(15)$



Zajímavý obrázek získáme, jestliže přes sebe nakreslíme části obrázku z množiny $\text{rng}(H|[n])$ pro nějaké n , přitom průhlednost části obrázku $H(m)$ pro $m \leq n$ se bude s rostoucím m zvětšovat:



3 Sjedenení a průnik σ -tříd

Tvrzení 3. *Nechť X, Y jsou σ -třídy a F, G jejich vytvářející funkce. Potom též $X \cup Y$, $X \cap Y$ jsou σ -třídy a funkce K, L definované vztahy*

$$K(n) = F(n) \cup G(n), \quad L(n) = F(n) \cap G(n)$$

jsou jejich vytvářející funkce.

Důkaz. Zřejmě K, L jsou stabilní funkce.

Dokážeme $X \cup Y = \bigcup \text{rng}(K)$. Necht $z \in X \cup Y = \bigcup \text{rng}(F) \cup \bigcup \text{rng}(G)$. Potom pro nějaké n je $z \in F(n)$ nebo $z \in G(n)$, tedy $z \in F(n) \cup G(n) = K(n)$, a tedy $z \in \bigcup \text{rng}(K)$.

Necht naopak $z \in \bigcup \text{rng}(K)$. Potom pro nějaké n je $z \in K(n) = F(n) \cup G(n)$, tedy $z \in F(n)$ nebo $z \in G(n)$, a tedy $z \in X \cup Y$.

Dokážeme $X \cap Y = \bigcup \text{rng}(L)$. Necht $z \in X \cap Y$. Potom pro nějaká m, n je $z \in F(m)$, $z \in G(n)$. Necht například $n \leq m$. Potom je $z \in F(m)$ a zároveň $z \in G(m)$, tedy $z \in L(m)$, a tedy $z \in \bigcup \text{rng}(L)$.

Necht naopak $z \in \bigcup \text{rng}(L)$. Potom pro nějaké n je $z \in L(n) = F(n) \cap G(n)$, a tedy

$$z \in \bigcup \text{rng}(F) \cap \bigcup \text{rng}(G) = X \cap Y.$$

Dokážeme, že pro každá $m \leq n$ je $K(m) \subseteq K(n)$. Nechť $m \leq n$. Potom $K(m) = F(m) \cup G(m) \subseteq F(n) \cup G(n) = K(n)$.

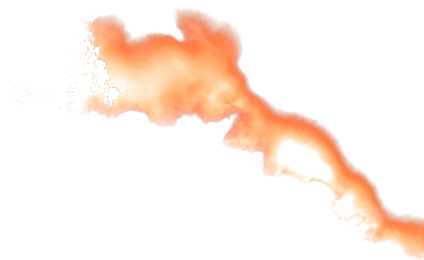
Podobně dokážeme, že pro každá $m \leq n$ je $L(m) \subseteq L(n)$.

□

Zvolme dále lososově oranžovou atomickou barvu $c_2 = \langle 255, 164, 28 \rangle$:



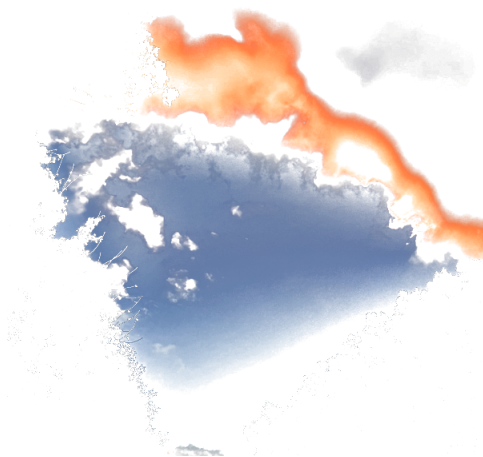
Podobným postupem jako v případě modré barvy získáme σ -třídu Z_2 a nějakou její vytvářející funkci H_2 . Zobrazíme část vytvářející funkce:



Definujme funkci H_3 s definičním oborem FN tak, že položíme

$$H_3(n) = H(n) \cup H_2(n).$$

Funkce H_3 je vytvářející funkce σ -třídy $Z \cup Z_2$, která je polomnožinou všech oranžových nebo modrých pixelů:



4 π -třídy

Řekneme, že X je π -třída, jestliže pro nějakou stabilní funkci F takovou, že pro každé n je $F(n)$ množina, je $X = \bigcap \text{rng}(F)$. Pokud F navíc splňuje, že pro každá $n \leq m$ je $F(m) \subseteq F(n)$, pak říkáme, že F je **vytvářející funkce** π -třídy X .

Tvrzení 4. *Nechť w je množina, $X \subseteq w$ je σ -třída a F její vytvářející funkce. Potom $w \setminus X$ je π -třída a funkce G s definičním oborem FN určená vztahem $G(n) = w \setminus F(n)$ je její vytvářející funkce.*

Důkaz. Dokážeme, že $w \setminus X = \bigcap \text{rng}(G)$. Nechť $x \in w \setminus X$. Poté $x \in w$ a $x \notin X = \bigcup \text{rng}(F)$. Pak pro každé n je $x \notin F(n)$ a tedy $x \in w \setminus F(n) = G(n)$. Proto $x \in w \setminus X$. Nechť naopak $x \in \bigcap \text{rng}(G)$. Pak pro každé n je $x \in G(n)$ a tedy $x \in w$ a $x \notin F(n)$. Proto $x \notin X$ a tedy $x \in w \setminus X$. $\square$

Polomnožinu pixelů, které nejsou ani jasně oranžové ani modré, obdržíme jako rozdíl $Z_4 = w \setminus Z_3$, což je podle předchozího tvrzení π -třída a funkce H_4 s definičním oborem FN definovaná vztahem

$$H_4(n) = w \setminus H_3(n)$$

je její vytvářející funkce.

Zobrazíme několik počátečních hodnot funkce H_4 :



π -třída Z_4 dává vyniknout jevům, které jsme si na původním obrázku nevšimli, protože byly zastíněny výraznými jevy lososově oranžové a modré barvy modelované polomnožinami Z a Z_2 . Na obloze si tak můžeme povšimnout světle modré barvy nebo jasně oranžové barvy.

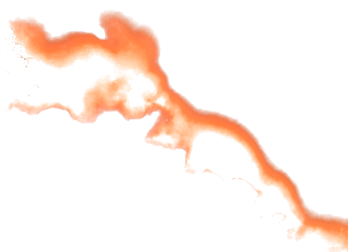
5 Model barev CIELAB

Dosud používané měření podobnosti barev v RGB modelu je primitivní. Pro vážnější úvahy o barvách bychom nahradili model RGB modelem CIELAB a podobnost barev v něm měřili metodou CIEDE2000. Ukážeme jen, jaké obrázky bychom obdrželi.

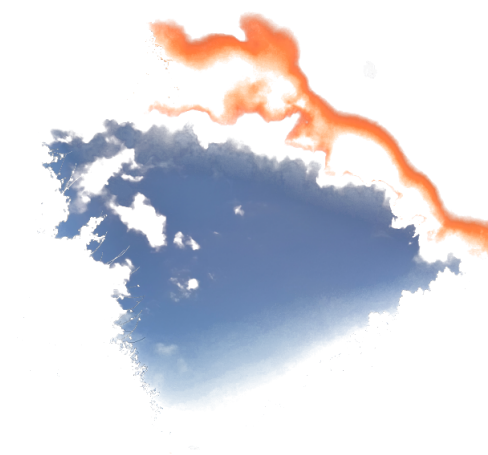
1. Modrá část:



2. Lososová část:



3. Část, která je modrá nebo lososová:



4. Část, která není ani modrá ani lososová:



6 Úkol

Pro splnění zápočtového úkolu je potřeba předvést na konzultaci důkaz Tvrzení 2.