Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

# Lineární algebra

## Poznámky k přednášce

Michal Krupka

Olomouc, 10. února 2024

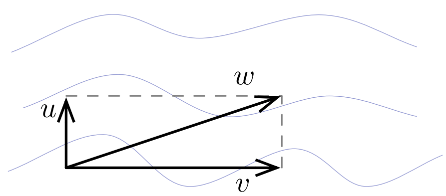
# Obsah

# Kapitola 1

# Vektory a vektorové prostory

## 1.1 Motivace

S vektory se setkáváme ve fyzice, matematice i informatice[1]. Důležité fyzikální vektory jsou například vektor rychlosti, zrychlení, síly. Na nich lze dobře pochopit základní vlastnosti vektorů, které jsou pak vtěleny do jejich matematické definice. Pokud se například snažím přeplavat řeku rychlostí $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u}$ je vektor; jistě záleží na směru, kterým plavu) a samotná řeka teče rychlostí $\boldsymbol{v}$ (opět vektor), bude má výsledná rychlost určena těmito vektory podle obr. 1.1.




Obrázek 1.1: $\boldsymbol{u}$: rychlost plavce ve stojaté vodě, $\boldsymbol{v}$: rychlost proudu vody, $\boldsymbol{w}$: skutečná rychlost plavce.

Toto pozorování nás vede k poznatku, že vektory rychlosti lze *sčítat* (*skládat*) podle známého rovnoběžníkového pravidla. Totéž platí i pro další fyzikální vektory, jako jsou např. už zmíněné vektory zrychlení a síly.

Z reality lze odpozorovat i další vlastnosti vektorů: proti proudu řeky lze plavat takovou rychlostí, že plavec zůstává na místě. Plaval rychlostí danou tzv. *opačným* (*inverzním*) vektorem k vektoru rychlosti proudu. Součtem těchto vektorů je tzv. *nulový vektor*. Každý

[1] V informatice, zejména programování, se ovšem pojem vektor používá i pro něco jiného: jednorozměrné pole.

vektor lze také vynásobit číslem. Pokud například při plavání zdvojnásobím své úsilí, bude vektor mé rychlosti dvojnásobkem původního vektoru.

Pojem vektoru a s ním související další pojmy patří k základním matematickým pojmům používaným i mimo matematiku, jak už bylo řečeno, kromě fyziky i v informatice. V matematice se kromě lineární algebry vektory používají v mnoha oblastech, například v geometrii. Matematická definice vektoru zavádí abstraktní pojem, který je tvořen některými vlastnostmi vektorů převzatými z reality. Které vlastnosti to jsou, je věcí volby. V základní definici, jak se v matematice ujala, se například nehovoří o délce vektoru a úhlu (odchylce) mezi dvěma vektory (budeme o nich mluvit později). Následuje tedy definice.

## 1.2 Struktura vektorového prostoru

Řekneme, že na množině $U$ je dána *struktura vektorového prostoru* (*nad reálnými čísly*; jiné typy vektorových prostorů zde neuvažujeme), jestliže každým dvěma prvkům $u,v \in U$ je přiřazen prvek $u+v \in U$ a každému prvku $u \in U$ a číslu $r \in \mathrm{R}$ je přiřazen prvek $ru$ (značený také $r \cdot u$) tak, že pro všechna $u,v,w \in U$ a $r,s \in \mathrm{R}$ jsou splněny následující podmínky:

$$\text{existuje prvek } \mathbf{0} \in U \text{ tak, že } 0 \cdot u = \mathbf{0} \text{ pro každé } u \in U, \tag{1.1}$$
$$u+v = v+u, \tag{1.2}$$
$$(u+v)+w = u+(v+w), \tag{1.3}$$
$$1 \cdot u = u, \tag{1.4}$$
$$r \cdot (s \cdot u) = (rs) \cdot u, \tag{1.5}$$
$$(r+s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u, \tag{1.6}$$
$$r \cdot (u+v) = r \cdot u + r \cdot v. \tag{1.7}$$

Je-li na množině $U$ dána struktura vektorového prostoru, hovoříme o $U$ jako o *vektorovém prostoru*. Prvkům vektorového prostoru říkáme *vektory*, reálným číslům v souvislosti s vektorovými prostory říkáme také *skaláry*. Vektor $u+v$ nazýváme *součet vektorů $u$ a $v$*, vektor *$ru$ násobek vektoru $u$ číslem* (*skalárem*) $r$. Vektor $\mathbf{0}$ značíme většinou stejně jako nulu, tedy 0, a nazýváme jej *nulový vektor*.

**Příklad 1.1.** Základním příkladem vektorového prostoru je množina $\mathrm{R}^n$, tedy množina všech uspořádaných $n$-tic reálných čísel se sčítáním vektorů a násobením skalárem daným obvyklým způsobem po složkách. Tato struktura vektorového prostoru na $\mathrm{R}^n$ se nazývá *kanonická*. Pokud neřekneme jinak (a to kromě úloh k této kapitole nikdy neřekneme), uvažujeme množinu $\mathrm{R}^n$ vždy automaticky s kanonickou strukturou vektorového prostoru. Proto můžeme o $\mathrm{R}^n$ mluvit jako o vektorovém prostoru a říkat „vektorový prostor $\mathrm{R}^n$“, aniž bychom specifikovali, jakou strukturu vektorového prostoru máme na mysli. Vektorovému prostoru $\mathrm{R}^n$ také říkáme *aritmetický vektorový prostor*.

Je ovšem nutné pochopit, že nejen $\mathrm{R}^n$ je vektorový prostor. Například fyzikální vektory jistě nejsou $n$-ticemi reálných čísel (a neexistuje jednoznačný způsob, jak jim $n$-tice reálných čísel přiřadit!).

**Příklad 1.2.** Označme $\mathrm{P}_n$ množinu všech polynomů stupně nejvýše $n$. Sčítání polynomů a násobení polynomů číslem definuje na množině $\mathrm{P}_n$ strukturu vektorového prostoru. (Používá se například v šifrování.)

**Věta 1.1.** *Pro vektorový prostor $U$ platí:*

1. *Pro každé $u \in U$ platí $\mathbf{0} + u = u$.*
2. *Pro každé $u \in U$ existuje jediný vektor $v \in U$ tak, že $u + v = \mathbf{0}$.*
3. *Pro každé číslo $r$ je $r \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

*Důkaz.* Cvičení.

Vektor $v$ z bodu 2. značíme $-u$ a nazýváme *vektorem opačným* (*inverzním*) *k vektoru* $u$. Platí tedy $u + (-u) = \mathbf{0}$. Přičítání opačného vektoru značíme jako odečítání: $u + (-w) = u - w$.

## ÚLOHY KE KAPITOLE 1

**1.1.** Definujte na jednoprvkové množině $\{u\}$ a dvojprvkové množině $\{u, v\}$ strukturu vektorového prostoru.

**1.2.** Ukažte, že množina $\mathrm{P}_n$ se sčítáním a násobením čísel z Příkladu 1.2 je opravdu vektorový prostor.

**1.3.** Definujte strukturu vektorového prostoru na intervalu $(0, +\infty)$.

**1.4.** Definujte na množině $\mathrm{R}$ jinou než kanonickou strukturu vektorového prostoru.

**1.5.** Dokažte, že $\mathrm{R}^n$ s kanonickou strukturou vektorového prostoru je opravdu vektorový prostor.

**1.6.** Dokažte Větu 1.1.

# Kapitola 2

# Podprostory a součiny vektorových prostorů

## 2.1 Lineární kombinace

*Lineární kombinace vektorů* $u_1, \dots, u_k \in U$ *s koeficienty* $r^1, \dots, r^k$ je libovolný vektor $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k$.[1] O vektorech $u_1, \dots, u_k$ říkáme, že jsou *lineárně závislé*, pokud existují koeficienty $r^1, \dots, r^k \in \mathsf{R}$, z nichž alespoň jeden není nulový, tak, že příslušná lineární kombinace je nulový vektor.

Pokud bychom nepožadovali, aby alespoň jeden koeficient byl nenulový, existovaly by takové koeficienty vždy, protože ať jsou vektory $u_1, \dots, u_k$ jakékoli, vždy platí $0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_k = 0$.

Vektory $u_1, \dots, u_k$ se nazývají *lineárně nezávislé*, pokud nejsou lineárně závislé. Tuto podmínku lze zformulovat i takto: pokud je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_k$ nulová, jsou všechny její koeficienty nulové. Neboli: z $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k = 0$ plyne $r^1 = \cdots = r^k = 0$. Tato podmínka se dobře prakticky ověřuje.

**Věta 2.1.** *Pro $k > 1$ jsou vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé, právě když žádný z nich není lineární kombinací ostatních.*

*Důkaz.* Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé, pak existuje nulová lineární kombinace $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k = 0$, ve které je jeden koeficient nenulový. Řekněme, že je to koeficient $r^i$. Rovnost můžeme upravit takto:

$$-r^i u_i = r^1 u_1 + \cdots + r^{i-1} u_{i-1} + r^{i+1} u_{i+1} + \cdots + r^k u_k.$$

[1] Pro indexy koeficientů lineární kombinace vektorů, stejně jako další čísla, jako složky vektorů z $\mathsf{R}^n$, řádkové indexy složek matic atd., používáme horní indexy.

Koeficient $-r^i$ je nenulový. Dostáváme tedy

$$u^i = -\frac{r^1}{r^i}u_1 - \cdots - \frac{r^{i-1}}{r^i}u_{i-1} - \frac{r^{i+1}}{r^i}u_{i+1} - \cdots - \frac{r^k}{r^i}u_k$$

a vyjádřili jsme vektor $u^i$ jako lineární kombinaci ostatních.

Naopak, jestliže

$$u_i = r^1u_1 + \cdots + r^{i-1}u_{i-1} + r^{i+1}u_{i+1} + \cdots + r^ku_k,$$

tedy jestliže vektor $u_i$ je lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k$, pak je všech $k$ vektorů lineárně závislých, protože

$$r^1u_1 + \cdots + r^{i-1}u_{i-1} - u_i + r^{i+1}u_{i+1} + \cdots + r^ku_k = 0$$

a na levé straně máme lineární kombinaci s nenulovými koeficienty, jelikož koeficient u vektoru $u_i$ je nenulový (číslo $-1$).

**Věta 2.2.** *Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé, pak pro každý vektor $v \in U$ existuje nejvýše jedna $k$-tice čísel $(r^1, \dots, r^k)$ taková, že $r^1u_1 + \cdots + r^ku_k = v$.*

*Důkaz.* Taková $k$-tice samozřejmě nemusí existovat. Kdyby existovaly dvě, kde druhá by byla $(s^1, \dots, s^k)$, pak platí nejen $r^1u_1 + \cdots + r^ku_k = v$, ale i $s^1u_1 + \cdots + s^ku_k = v$. Odtud

$$r^1u_1 + \cdots + r^ku_k = s^1u_1 + \cdots + s^ku_k,$$

což snadno upravíme na

$$(r^1 - s^1)u_1 + \cdots + (r^k - s^k)u_k = 0.$$

Z lineární nezávislosti plyne, že všechny koeficienty této lineární kombinace jsou nulové, tedy $r^1 - s^1 = 0$, ..., $r^k - s^k = 0$. Obě $k$-tice jsou tedy totožné a tvrzení platí.

Větu lze zformulovat i takto: rovnice $r^1u_1 + \cdots + r^ku_k = v$ (kde $r^1, \dots, r^k$ jsou neznámé) má nejvýše jedno řešení.

V definici lineární nezávislosti jsme to požadovali jen pro $v = 0$.

*Lineárním obalem množiny $K \subseteq U$* rozumíme množinu všech lineárních kombinací všech konečných $n$-tic vektorů z $K$ pro všechna přirozená čísla $n$. Lineární obal množiny $K$ značíme $\langle K \rangle$. Pokud je množina $K$ konečná, $K = \{u_1, \dots, u_k\}$, značíme jej také $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Říkáme, že množina $K$ *generuje* vektorový prostor $U$, pokud $\langle K \rangle = U$.

Pokud množina $\{u_1, \dots, u_k\}$ generuje vektorový prostor $U$, má pro libovolné $v \in U$ rovnice $r^1u_1 + \cdots + r^ku_k = v$ vždy alespoň jedno řešení. (To není žádný hluboký poznatek, jen přeformulování definice.)

**Věta 2.3.** *Pro libovolnou množinu $K \subseteq U$ platí $\langle \langle K \rangle \rangle = \langle K \rangle$.*

*Důkaz.* Jak víme, základní způsob důkazu rovnosti dvou množin je dokázat, že každá z množin je podmnožinou té druhé. Inkluze $\langle K\rangle \subseteq \langle\langle K\rangle\rangle$ je jednoduchá a plyne z úlohy 2.5.

Dokážeme, že $\langle\langle K\rangle\rangle \subseteq \langle K\rangle$. Uděláme to tak, že ukážeme, že každý prvek $w \in \langle\langle K\rangle\rangle$ je prvkem množiny $\langle K\rangle$. Jelikož $w$ je prvkem lineárního obalu množiny $\langle K\rangle$, existují vektory $v_1,\dots,v_l \in \langle K\rangle$ a čísla $s^1,\dots,s^l$ tak, že

$$w = s^1 v_1 + \cdots + s^l v_l. \tag{2.1}$$

Každý z vektorů $v_i$ je ovšem lineární kombinací nějakých vektorů z $K$: $v_i = r_i^1 u_{i,1} + \cdots + r_i^{k_i} u_{i,k_i} = v_i$, kde $u_{i,1},\dots,u_{i,k_i} \in K$. Dosazením do (2.1) zjistíme, že vektor $w$ je lineární kombinací vektorů z $K$, a tedy je prvkem množiny $\langle K\rangle$.

## 2.2 Podprostor a součin

Mějme neprázdnou podmnožinu $V$ vektorového prostoru $U$ splňující $\langle V\rangle = V$. Jinými slovy, pro libovolné $k \in \{1,2,\dots\}$, libovolných $k$ vektorů $v_1,\dots,v_k \in V$ a libovolných $k$ čísel $r^1,\dots,r^k \in \mathrm{R}$ vždy platí $r^1 v_1 + \cdots + r^k v_k \in V$. Díky této vlastnosti lze na množině $V$ zavést strukturu vektorového prostoru *zúžením* sčítání vektorů a násobení skalárem na $V$. Množinu $V$ vždy uvažujeme s touto strukturou a nazýváme *vektorovým podprostorem* vektorového prostoru $U$.

Každá z následujících dvou podmínek je ekvivalentní podmínce pro to, aby $V$ byl vektorový podprostor $U$:

1. Pro libovolné dva vektory $v_1, v_2 \in V$ a čísla $r^1, r^2$ platí $r^1 v_1 + r^2 v_2 \in V$.

2. Pro každé dva vektory $v_1, v_2 \in V$ platí $v_1 + v_2 \in V$ a pro každý vektor $v \in V$ a číslo $r$ platí $rv \in V$.

**Věta 2.4.** *Průnik dvou vektorových podprostorů vektorového prostoru $U$ je opět vektorový podprostor $U$.*

*Důkaz.* Cvičení.

**Příklad 2.1.** Každý vektorový podprostor daného vektorového prostoru obsahuje nulový vektor. Pokud neobsahuje žádný jiný vektor, je to vektorový podprostor a nazývá se *nulový vektorový podprostor*.

**Příklad 2.2.** Charakteristika všech vektorových podprostorů vektorového prostoru $\mathrm{R}^2$.

Jsou-li $U$ a $V$ vektorové prostory, lze na množině $U \times V$ (kartézský součin množin $U$ a $V$) zavést strukturu vektorového prostoru tak, že se sčítání vektorů a násobení skalárem definuje takto:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \tag{2.2}$$

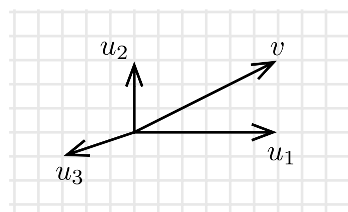
$$r \cdot (u, v) = (ru, rv) \tag{2.3}$$

pro libovolné vektory $u_1, u_2, u \in U$, $v_1, v_2, v \in V$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Vektorový prostor $U \times V$ se nazývá *součin vektorových prostorů* $U$ a $V$.

## ÚLOHY KE KAPITOLE 2

**2.1.** Ukažte, že veškeré výpočty v důkazu Věty 2.1 jsou v souladu s definicí vektorového prostoru a tvrzení z předchozí kapitoly.

**2.2.** Na obr. 2.1 jsou znázorněny vektory $u_1$, $u_2$, $u_3$ (sčítání vektorů a násobení číslem jsou dány geometrickými konstrukcemi ze střední školy). Vyjádřete každý z nich jako lineární kombinaci ostatních dvou. Vyjádřete vektor $v$ několika různými způsoby jako lineární kombinaci vektorů $u_1$, $u_2$, $u_3$.




Obrázek 2.1: Obrázek k úloze 2.2

**2.3.** Je jeden vektor lineárně nezávislý?

**2.4.** Platí, že pokud jsou vektory lineárně nezávislé, nelze žádný z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních? Proč? Platí, že pokud jsou lineárně závislé, lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních? Proč? Uveďte příklady.

**2.5.** Dokažte, že pro každou množinu $K$ ve vektorovém prostoru platí $K \subseteq \langle K \rangle$.

**2.6.** Jsou dány následující reálné funkce reálné proměnné:

$$f_1(x) = x+1 \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x, \qquad f_4(x) = \sin x$$
$$f_5(x) = \frac{x}{13}, \qquad f_6(x) = 0, \qquad f_7(x) = 1, \qquad f_8(x) = \frac{13}{x}.$$

Zjistěte, grafy kterých z nich jsou vektorovými podprostory $\mathbb{R}^2$. (Graf funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je množina uspořádaných dvojic prvků $\mathbb{R}$ a jejich obrazů. Někdy se graf funkce ztotožňuje se samotnou funkcí.) Udělejte to přímo pomocí definice vektorového podprostoru, tedy bez použití výsledků Příkladu 2.2.

**2.7.** Jsou všechny vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$ grafem nějaké funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

**2.8.** Charakterizujte všechny vektorové podprostory v $\mathbb{R}^3$.

**2.9.** Ověřte, že vztahy (2.2) a (2.3) opravdu definují na množině $U \times V$ strukturu vektorového prostoru.

# Kapitola 3

# Matice

Na přednášce jsem definoval matice a operace s nimi. V souvislosti s násobením matic jsem zavedl i pojem inverzní matice.

# Kapitola 4

# Báze vektorových prostorů

## 4.1 Báze, dimenze a souřadnice

Uspořádanou $m$-tici $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ vektorů vektorového prostoru $U$ nazýváme jeho *báze* (celý pojem je tedy *báze vektorového prostoru*), pokud jsou vektory $u_1, \ldots, u_m$ lineárně nezávislé a pokud množina $\{u_1, \ldots, u_m\}$ generuje vektorový prostor $U$.

**Příklad 4.1.** $m$-tice $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ vektorů v aritmetickém vektorovém prostoru $\mathrm{R}^m$, kde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , u_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

je báze vektorového prostoru $\mathrm{R}^m$ zvaná *kanonická báze.*

Sčítání vektorů a násobení skalárem lze počítat pomocí souřadnic. Pro libovolné dva vektory $v, w \in U$ a číslo $r$ totiž platí:

$$(v+w)_\alpha = v_\alpha + w_\alpha, \tag{4.1}$$

$$(rv)_\alpha = r(v_\alpha), \tag{4.2}$$

kde na pravé straně sčítáme a násobíme číslem $m$-tici čísel.

Následující Věta 4.1 poznatek, který je hluboký:

**Věta 4.1.** *Všechny báze vektorového prostoru $U$ mají stejný počet prvků.*

Tuto větu lze dokázat pomocí následujících tvrzení. První z nich je variantou základní *Steinitzovy věty o výměně*:

**Věta 4.2.** *Mějme konečnou množinu vektorů* $K = \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq U$ *a nenulový vektor* $v \in \langle K \rangle$*. Pak existuje číslo* $i \in \{1, \dots, k\}$ *takové, že když vektor* $u_i$ *v množině* $K$ *nahradíme vektorem* $v$*, bude výsledná množina generovat týž vektorový podprostor jako množina* $K$*. Jinak řečeno, pro množinu* $\bar{K} = \{u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k\}$ *platí* $\langle \bar{K} \rangle = \langle K \rangle$*.*

*Důkaz Věty 4.2.* Jelikož vektor $v$ leží v lineárním obalu množiny $K$, je nějakou lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$. Je tedy

$$v = r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k \tag{4.3}$$

pro nějaká čísla $r^1, \dots, r^k$. Některé z těchto čísel je určitě nenulové, protože vektor $v$ je nenulový.

Označme $i$ jeden z indexů, pro které je $r^i \neq 0$. Pak (jak se můžete přesvědčit úpravou vztahu (4.3))

$$u_i = \frac{1}{r^i}(-r^1 u_1 - \cdots - r^{i-1} u_{i-1} + v - r^{i+1} u_{i+1} - \cdots - r^k u_k). \tag{4.4}$$

Pomocí vztahů (4.3) a (4.4) už můžeme dokázat tvrzení věty. Pokud je vektor $w$ lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$, pak dosazením za $u_i$ podle (4.4) ho vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k$. Naopak, pokud je vektor lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \dots, u_k$, vyjádříme ho dosazením z (4.3) jako lineární kombinaci vektorů $u_1, \dots, u_k$. Takže $\langle \bar{K} \rangle = \langle K \rangle$.

**Věta 4.3.** *Je-li v předchozí větě* $L \subseteq K$ *taková množina, že* $v \notin \langle L \rangle$*, pak číslo* $i$ *lze vybrat tak, že* $u_i \notin L$*.*

*Důkaz.* Jelikož $v$ není lineární kombinací vektorů z $L$, musí být na pravé straně (4.3) alespoň jeden vektor s nenulovým koeficientem, který neleží v $L$. To bude náš vektor $u_i$.

V následující větě značí $|K|$ a $|L|$ počet prvků množiny $K$ a počet prvků množiny $L$.

**Věta 4.4.** *Jestliže* $L \subseteq U$ *je lineárně nezávislá množina s* $l$ *prvky (tedy* $|L| = l$*) a* $K \subseteq U$ *konečná množina generující* $U$*, pak existuje* $l$ *prvků z* $K$*, které když nahradíme všemi prvky z* $L$*, pak nová množina bude stále generovat* $U$*.*

*Důkaz.* Pomocí Věty 4.2 postupně nahradíme některé vektory množiny $K$ všemi vektory množiny $L$. Díky Větě 4.3 to můžeme udělat tak, že vždy nahradíme vektor původní množiny $K$, nikdy ne už přidaný vektor množiny $L$. T

Z tohoto tvrzení samozřejmě plyne, že $|L| \leq |K|$.

*Důkaz Věty 4.1.* Jestliže $K$ a $L$ jsou dvě množiny vektorů tvořících bázi, pak podle Věty 4.4 platí $|L| \leq |K|$ a také $|K| \leq |L|$.

Počet prvků báze vektorového prostoru se nazývá jeho *dimenzí*.

Vektorový prostor $U$ nemusí mít žádnou bázi, a tedy ani dimenzi. O takových vektorových prostorech říkáme, že mají nekonečnou dimenzi. I takové vektorové prostory se někdy v praxi hodí (v informatice např. v počítačové grafice).

O dimenzi vektorového prostoru $U$ se dá říci, že to je největší možný počet lineárně nezávislých vektorů v $U$. U prostorů s nekonečnou dimenzí báze neexistuje proto, že lze nalézt libovolný konečný počet vektorů, které jsou lineárně nezávislé. Proto největší takový počet neexistuje. Dimenze $U$ se dá také charakterizovat jeko nejmenší možný počet vektorů generujících $U$. Obě tvrzení si dokážete jako cvičení.

Je-li $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového prostoru $U$, pak rovnice $r^1 u_1 + \dots + r^m u_m = v$ má právě jedno řešení $(r^1, \dots, r^m)$. Čísla $r^1, \dots, r^m$ obvykle značíme (pořadě) $v^1_\alpha, \dots, v^m_\alpha$, případně jen $v^1, \dots, v^m$ (pokud je báze, ve které vektor $v$ vyjadřujeme, zřejmá z kontextu). Celou $m$-tici $(v^1_\alpha, \dots, v^m_\alpha)$ značíme $v_\alpha$ a nazýváme *souřadnicemi vektoru $v$ v bázi $\alpha$*. V případě, že nešetříme místem, ji píšeme do sloupce:

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} v^1_\alpha \\ v^2_\alpha \\ \vdots \\ v^m_\alpha \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$m$-ticím čísel jsme běžně zvyklí říkat vektory a mluvit např. o *násobení matice vektorem.* Jak víme, ve skutečnosti se o vektory opravdu jedná, a to konkrétně o vektory z vektorového prostoru $\mathrm{R}^m$. Nesmíme ale zapomínat, že nejde o jediný možný typ vektorů.

## 4.2 Báze podprostorů

Jak víme, vektorový podprostor $V \subseteq U$ je sám vektorovým prostorem. Můžeme se tedy bavit i o jeho bázi a dimenzi. Co se o nich dá říci, ukazují následující tvrzení.

**Věta 4.5.** *Je-li* $\dim U = m$ *a* $V \subseteq U$ *je vektorový podprostor, pak* $V$ *má bázi a* $\dim V \leq m$.

*Důkaz.* Je-li $(v_1, \dots, v_l)$ lineárně nezávislá $l$-tice vektorů z $V$, pak podle Věty 4.4 je $l \leq m$ (stačí vzít $K$ jako množinu všech vektorů nějaké báze prostoru $U$ a $L = \{v_1, \dots, v_l\}$). Proto existuje největší možný počet lineárně nezávislých vektorů v $V$, a tedy báze a dimenze.

Nerovnost plyne z toho, co je napsáno na začátku důkazu.

**Věta 4.6.** *Je-li* $\dim U = m$ *a* $V \subseteq U$ *je vektorový podprostor dimenze* $n$*, pak existuje báze* $U$*, jejíchž prvních* $n$ *vektorů tvoří bázi* $V$*.*

*Důkaz.* Plyne přímo z Věty 4.4.

## 4.3 Matice přechodu

Je-li $\bar{\alpha} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ druhá báze vektorového prostoru $U$, můžeme každý vektor báze $\alpha$ vyjádřit v této druhé bázi a ze souřadnic vytvořit čtvercovou matici:

$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} = \begin{pmatrix} (u_1)^1_{\bar{\alpha}} & (u_2)^1_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^1_{\bar{\alpha}} \\ (u_1)^2_{\bar{\alpha}} & (u_2)^2_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^2_{\bar{\alpha}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_1)^m_{\bar{\alpha}} & (u_2)^m_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^m_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Jak lze snadno ověřit pomocí (4.1) a (4.2), pro každý vektor $v$ platí

$$v_{\bar{\alpha}} = \mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot v_\alpha. \tag{4.7}$$

Matici $M_{\bar{\alpha},\alpha}$ tedy můžeme použít k výpočtu souřadnic vektoru $v$ v bázi $\bar{\alpha}$ z jeho souřadnic v bázi $\alpha$. Matice $M_{\bar{\alpha},\alpha}$ se nazývá *matice přechodu od báze $\alpha$ k bázi $\bar{\alpha}$.*

Pro matice přechodu také platí

$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot \mathbf{M}_{\alpha,\bar{\alpha}} = \mathrm{E}_m, \tag{4.8}$$
$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha'} \cdot \mathbf{M}_{\alpha',\alpha} = \mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha}, \tag{4.9}$$

kde $\alpha$, $\alpha'$ a $\bar{\alpha}$ jsou libovolné báze a $\mathrm{E}_m$ je jednotková matice.

Vztah (4.8) říká, že matice $\mathbf{M}_{\alpha,\bar{\alpha}}$ je inverzní k matici $\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha}$ (a naopak). Vztah (4.9) umožňuje podstatné zjednodušení některých výpočtů, jak ještě uvidíme v dalším textu.

### ÚLOHY KE KAPITOLE 4

**4.1.** Ověřte rovnice (4.1) a (4.2).

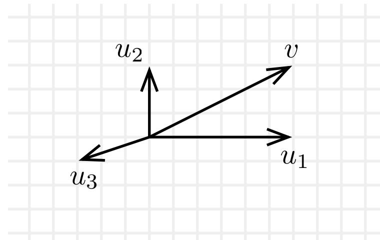
**4.2.** Dokažte tvrzení z textu: dimenze vektorového prostoru $U$ je největší možný počet lineárně nezávislých vektorů v $U$ a nejmenší možný počet vektorů generujících $U$.

**4.3.** Na obr. 4.1 jsou znázorněny vektory $u_1$, $u_2$, $u_3$ a $v$ v dvojrozměrném vektorovém prostoru $U$. Odhadněte z obrázku souřadnice vektoru $v$ vzhledem k bazím $\alpha_1 = (u_1, u_2)$, $\alpha_2 = (u_2, u_3)$ a $\alpha_3 = (u_3, u_1)$.

**4.4.** Je dvojice $(u_3, v)$ z obr. 4.1 báze? Odhadněte to z obrázku a pak ověřte výpočtem pomocí souřadnicového vyjádření těchto vektorů v jedné z bazí $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ (nebo ve více).

**4.5.** Najděte bázi $\beta = (w_1, w_2)$ vektorového prostoru z úlohy 4.3 tak, aby

1. $(u_1)_\beta = (1,1)$ a $(u_2)_\beta = (1,-1)$,
2. $(u_1)_\beta = (1,1)$ a $(u_2)_\beta = (3,-3)$,
3. $(u_1)_\beta = (128, \frac{1}{8192})$ a $(u_2)_\beta = (256, \frac{1}{1024})$.




Obrázek 4.1: Obrázek k úloze 4.3

Vektory $w_1$ a $w_2$ vyjádřete pomocí jedné z bazí $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Výsledek nejprve zkuste odhadnout z obrázku (pokud to lze), pak ho ověřte výpočtem. Pokud to lze, načrtněte bázi do obrázku.

**4.6.** Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.7.** Jak vypadá matice přechodu $\mathbf{M}_{\alpha,\alpha}$?

**4.8.** Napište všech šest možných netriviálních matic přechodu mezi bázemi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ z úlohy 4.3 a zkuste je mezi sebou násobit.

**4.9.** Uveďte příklad vektorového prostoru dimenze 1, jehož prvky jsou uspořádané dvojice reálných čísel.

**4.10.** O polynomech jedné proměnné jsme už hovořili. Ukažte, že množina $\mathsf{P}$ všech polynomů libovolného stupně (se standardním sčítáním polynomů a násobním číslem) je vektorový prostor nekonečné dimenze.

**4.11.** Ukažte, že vektorový prostor $\mathsf{P}$ z předchozí úlohy je vektorovým podprostorem vektorového prostoru všech reálných funkcí $\mathsf{R} \to \mathsf{R}$ (polynomy v této úloze chápeme jako reálné funkce).

# Kapitola 5

# Lineární zobrazení

K pochopení pojmu lineárního zobrazení potřebujeme nejprve chápat obecný pojem zobrazení. Pokud budete mít s touto kapitolou problémy, mohlo by pomoci zopakovat si základy zobrazení z prvního semestru.

## 5.1 Definice a příklady

Zobrazení $f\colon U \to V$ vektorových prostorů $U$ a $V$ se nazývá *lineární* (někdy též *homomorfismus vektorových prostorů*), jestliže pro každé vektory $u_1, u_2, u \in U$ a číslo $r$ platí

$$f(u_1+u_2) = f(u_1)+f(u_2), \tag{5.1}$$

$$f(ru) = rf(u). \tag{5.2}$$

Podmínky (5.1) a (5.2) jsou ekvivalentní podmínce

$$f(r^1u_1+r^2u_2) = r^1f(u_1)+r^2f(u_2) \tag{5.3}$$

(pro každé $u_1, u_2 \in U$, $r^1, r^2 \in \mathrm{R}$).

Je-li lineární zobrazení prosté, nazývá se také *monomorphismus*. Surjektivnímu lineárnímu zobrazení se také říká *epimorfismus*.

Z definice lineárního zobrazení ihned plyne, že $f(0) = 0$ (tj. obraz nulového vektoru v $U$ je nulový vektor ve $V$). To lze dokázat různými způsoby, můžeme zkusit například tento:

$$f(0) = f(0-0) = f(0)-f(0) = 0.$$

Je-li $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ báze vektorového prostoru $U$, platí pro každý vektor $u \in U$ (s použitím (5.3)):

$$f(u) = f(u_\alpha^1u_1+\cdots+u_\alpha^mu_m) = u_\alpha^1f(u_1)+\cdots+u_\alpha^mf(u_m).$$

Hodnota zobrazení $f$ ve vektoru $u$ tedy závisí jen na jeho hodnotách v prvcích báze $\alpha$ a na souřadnicích vektoru $u$ v bázi $\alpha$. Lineární zobrazení $f$ je tedy jednoznačně určeno hodnotami $f(u_1),\ldots,f(u_m)\in V$. Tento poznatek je důležitý sám o sobě. Současně také umožňuje zavést pojem matice lineárního zobrazení, o kterém budeme mluvit později.

**Příklad 5.1** (Identita)**.** Uvažme identické zobrazení (identitu) $\mathrm{Id}_U$ na vektorovém prostoru $U$, tedy zobrazení $\mathrm{Id}_U\colon U\to U$, které každému vektoru $u\in U$ přiřazuje týž vektor $u$. Jinými slovy, zobrazení je dáno předpisem

$$\mathrm{Id}_U(u)=u. \tag{5.4}$$

Ukážeme, že zobrazení je lineární. Uděláme to tak, že dokážeme, že zobrazení splňuje podmínku (5.3). V důkazu přitom třikrát použijeme vlastnost (5.4).

Levá strana (5.3) se pro naše zobrazení upraví takto:

$$\mathrm{Id}_U(r^1u_1+r^2u_2)=r^1u_1+r^2u_2,$$

pravá:

$$r^1\mathrm{Id}_U(u_1)+r^2\mathrm{Id}_Uu_2=r^1u_1+r^2u_2.$$

Levá a pravá strana se tedy rovnají a důkaz je proveden

**Příklad 5.2** (Konstanta)**.** Konstantní zobrazení (konstanta) dvou vektorových prostorů $U$ a $V$ je zobrazení $f\colon U\to V$, které každému vektoru vektorového prostoru $U$ přiřazuje týž vektor z $V$. Jinými slovy, existuje vektor $v_0\in V$ takový, že pro každý vektor $u\in U$ platí $f(u)=v_0$ (všimněte si, že podmínka obsahuje kvantifikátor *existuje* a po něm kvantifikátor *pro každý*).

Pokusíme se zjistit, zda, případně za jakých okolností, je konstantní zobrazení lineární. Odpověď na to je ve skutečnosti snadná, protože už víme, že pro každé lineární zobrazení $f$ se nulový vektor zobrazí na nulový vektor, neboli $f(0)=0$. Jelikož pro naše zobrazení $f$ platí $f(0)=v_0$, musí být $v_0=0$. Budeme ale předstírat, že tato skutečnost nám není známa a podíváme se na naši konstantu od začátku.

V případě, že $f$ je lineární, musí pro libovolný vektor $u\in U$ platit

$$v_0=f(u+u)=f(u)+f(u)=v_0+v_0,$$

neboli

$$v_0=v_0+v_0.$$

Přičtením $-v_0$ k oběma stranám dostaneme

$$0=v_0.$$

Dospěli jsme tedy znovu ke stejnému výsledku: aby zobrazení $f$ bylo lineární, musí být $v_0 = 0$.

To ale ještě není konec, protože pro tuto možnost ještě nevíme, zda zobrazení je lineární, nebo ne. Abychom to zjistili, ověříme platnost podmínky (5.3) (za předpokladu $v_0 = 0$). Levá strana:

$$f(r^1 u_1 + r^2 u_2) = 0,$$

pravá strana:

$$r^1 f(u_1) + r^2 f u_2 = r^1 \cdot 0 + r^2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Levá a pravá strana se tedy rovnají a máme úplnou odpověď: ze všech konstantních zobrazení $f : U \to V$ je lineární jedině nulové. Neboli: konstantní zobrazení $f : U \to V$ dané předpisem $f(u) = v_0$ pro pevné $v_0$ je lineární právě když $v_0 = 0$.

**Příklad 5.3** (Sčítání vektorů)**.** Sčítání vektorů vektorového prostoru $U$ je zobrazení, které dvojici vektorů $u, v \in U$ přiřadí třetí vektor prostoru $U$ značený $u + v$. Je to tedy zobrazení z množiny $U \times U$ do množiny $U$. Víme ze druhé kapitoly, že množinu $U \times U$ můžeme opět chápat jako vektorový prostor. Zobrazení $f : U \times U \to U$, které dvojici vektorů přiřadí jejich součet, je tedy zobrazení vektorových prostorů a můžeme se ptát, zda je lineární.

Ještě si ujasníme značení. Prvky prostoru $U \times U$ jsou dvojice vektorů z $U$, tedy například $(u, v)$, kde $u$ i $v$ jsou vektory z $U$. Obraz takové dvojice při zobrazení $f$ je součet jejích složek, tedy

$$f(u, v) = u + v. \tag{5.5}$$

Formalista by nás upozornil, že vlevo by se mělo psát $f((u, v))$, protože obraz prvku $x$ při zobrazení $f$ je $f(x)$ a v našem případě $x = (u, v)$. My si ale jedny závorky odpustíme a ani nás to nepoplete. A druhá poznámka: možná bychom měli ale být důslednější a dvojici $(u, v)$ psát do sloupce:

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u + v. \tag{5.6}$$

Při zjišťování, zda je $f$ lineární, použijeme pro změnu přímo definici lineárního zobrazení, tedy podmínky (5.1) a (5.2). Podmínka (5.1) říká, že součet dvou vektorů se má zobrazit na součet jejich obrazů. Naše dva vektory jsou ovšem dvě dvojice vektorů, označíme si je třeba $(u_1, v_1)$ a $(u_2, v_2)$. Jejich součet (jakožto součet ve vektorovém prostoru $U \times U$!) je dvojice $(u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ — to plyne přímo z definice součinu vektorových prostorů, konkrétně ze vztahu (2.2).

Podmínka (5.1) vypadá v našem případě takto:

$$f\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}.$$

Takže začneme psát levou stranu podmínky pro naše dvě dvojice a pokusíme se dobrat k pravé straně:

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)&=f\begin{pmatrix}u_1+u_2\\v_1+v_2\end{pmatrix}=(u_1+u_2)+(v_1+v_2)\\&=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)=f\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tak se nám to povedlo. Použili jsme postupně vztah (2.2), definici zobrazení $f$ (5.6), asociativitu a komutativitu sčítání vektorů a nakonec opět definici zobrazení $f$.

Teď ještě dokázat podmínku (5.2). Udělám to už jen stručně:

$$f\left(r\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}ru\\rv\end{pmatrix}=ru+rv=r(u+v)=r\cdot f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

(už sami si najděte vztahy, které jsem tady použil).

Dokázali jsme tedy, že sčítání vektorů je lineární zobrazení.

## 5.2 Obraz a jádro lineárního zobrazení

Množina $f(U)$, tedy obraz množiny $U$ při zobrazení $f$ se nazývá *obraz* (*image*) *zobrazení* $f$. Značí se také $\operatorname{im} f$. Připomeňme, že $f(U)$ je množina všech vektorů z $V$, které jsou obrazy vektorů z $U$, tedy $f(U)=\{v\in V \mid \text{existuje } u\in U \text{ takové, že } v=f(u)\}$. Stručněji lze také napsat $f(U)=\{f(u)\mid u\in U\}$.

**Věta 5.1.** *$f(U)$ je vektorový podprostor vektorového prostoru $V$.*

*Důkaz.* Jak víme, stačí dokázat, že pro libovolné dva vektory z $f(U)$ leží libovolná jejich lineární kombinace v $f(U)$. Zvolme tedy $v_1,v_2\in f(U)$ a čísla $r^1,r^2$. Dokážeme, že $r^1v_1+r^2v_2$ leží v $f(U)$.

Jelikož $v_1,v_2\in f(U)$, pak podle definice existují vektory $u_1,u_2\in U$ jejichž obrazy při zobrazení $f$ jsou vektory $v_1$ a $v_2$. Zkoumaná lineární kombinace má tedy tvar $r^1f(u_1)+r^2f(u_2)$. Jelikož $f$ je lineární zobrazení, platí $r^1f(u_1)+r^2f(u_2)=f(r^1u_1+r^2u_2)$. Zkoumanou lineární kombinaci jsme tedy vyjádřili jako obraz nějakého vektoru z $U$ (konkrétně vektoru $r^1u_1+r^2u_2$). Tedy $r^1f(u_1)+r^2f(u_2)\in f(U)$, což dokazuje, že $f(U)\subseteq V$ je vektorový podprostor.

Množina $\ker f = \{u \in U \mid f(u) = 0\}$ (tedy vzor množiny $\{0\}$ při zobrazení $f$) se nazývá *jádro lineárního zobrazení $f$*.

**Věta 5.2.** $\ker f$ *je vektorový podprostor vektorového prostoru $U$.*

*Důkaz.* Cvičení.

V následujících příkladech se vrátíme k příkladům lineárních zobrazení z minulé podkapitoly a podíváme se na jejich jádro a obraz.

**Příklad 5.4** (Identita)**.** Jádrem identity $\mathrm{Id}_U$ je množina $\{0\}$ obsahující jen nulový vektor prostoru $U$. Každý jiný vektor než nulový se totiž zobrazí na nenulový vektor (sebe sama). Obrazem této identity je samozřejmě celý vektorový prostor $U$.

**Příklad 5.5** (Nulové zobrazení)**.** Jádrem nulového konstantního zobrazení $f\colon U \to V$, které každému vektoru z $U$ přiřazuje nulový vektor z $V$, je celá množina $U$, protože pro libovolný vektor $u \in U$ platí $f(u) = 0$. Obrazem nulového zobrazení je množina $\{0\}$. Na žádný jiný vektor z $V$ se vektoru z $U$ nezobrazují.

**Příklad 5.6** (Sčítání vektorů)**.** Co je jádrem a obrazem zobrazení $f\colon U \times U \to U$ daného předpisem $f(u,v) = u+v$? Podle definice to má být množina všech vektorů $(u,v) \in U \times U$ (vektory z $U \times U$ jsou dvojice) takových, že $f(u,v) = 0$, tedy $u+v = 0$. Je to tedy množina všech dvojic $(u,-u)$, kde $u \in U$. Symbolicky: $\ker f = \{(u,-u) \in U \times U \mid u \in U\}$.

Obraz zobrazení $f$ je celá množina $U$, protože každý vektor $w \in U$ je součtem nějakých dvou vektorů (např. $w = 0 + w$).

Teď si postupně ukážeme několik základních vlastností jádra a obrazu lineárního zobrazení $f\colon U \to V$: jaký vztah mají jejich dimenze a jak souvisí s injektivitou zobrazení. Začneme pomocným tvrzením.

**Věta 5.3.** *Jestliže $(u_1, \dots, u_m)$ je báze vektorového prostoru $U$, pak vektory $f(u_1), \dots, f(u_m)$ generují vektorový prostor $f(U)$.*

*Důkaz.* Je to vcelku jednoduché cvičení na pojem obrazu zobrazení, důkaz nechám na vás.

**Věta 5.4.** $\dim f(U) = \dim U - \dim\ker f$*.*

*Důkaz.* Označme $m = \dim U$, $k = \dim\ker f$, $l = \dim f(U)$. Podle Věty 4.6 existuje báze $(u_1, \dots, u_m)$ vektorového prostoru $U$ tak, že jejích prvních $k$ vektorů tvoří bázi vektorového podprostoru $\ker f$.

Vektory $u_1, \dots, u_k$ leží v jádru zobrazení $f$, což přesně podle definice jádra znamená, že se všechny zobrazí na nulový vektor: $f(u_1) = \dots = f(u_k) = 0$.

Podle předchozí věty je prostor $f(U)$ generovaný vektory $f(u_1), \dots, f(u_m)$. Prvních $k$ těchto vektorů je ovšem nulových, takže prostor $f(U)$ je generovaný i vektory $f(u_{k+1}), \dots,$

$f(u_m)$. Ukážeme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé (a tvoří tedy bázi vektorového prostoru $f(U)$).

Víme, co dělat, když máme ověřit lineární nezávislost vektorů. Napíšeme si takovou rovnici:

$$r^{k+1} f(u_{k+1}) + \cdots + r^m f(u_m) = 0 \tag{5.7}$$

a pokusíme se z ní odvodit, že čísla $r^{k+1}, \ldots r^m$ jsou všechna nulová. Jelikož zobrazení $f$ je lineární, můžeme rovnici přepsat takto (podle (5.3) rozšířeném na víc vektorů):

$$f(r^{k+1} u_{k+1} + \cdots + r^m u_m) = 0. \tag{5.8}$$

Vidíme, že vektor $r^{k+1} u_{k+1} + \cdots + r^m u_m$ leží v jádru lineárního zobrazení $f$. Musí tedy být lineární kombinací vektorů $u_1, \ldots, u_k$. Takže pro nějaká čísla $s^1, \ldots, s^k$ musí platit

$$r^{k+1} u_{k+1} + \cdots + r^m u_m = s^1 u_1 + \cdots + s^k u_k,$$

neboli

$$s^1 u_1 + \cdots + s^k u_k - r^{k+1} u_{k+1} - \cdots - r^m u_m = 0.$$

Vektory $u_1, \ldots, u_m$ ovšem tvoří bázi vektorového prostoru $U$. Jsou tedy lineárně nezávislé a všechna čísla $s^1, \ldots, s^k, r^{k+1}, \ldots r^m$ jsou nulová. To jsme potřebovali dokázat (přesně řečeno, stačilo nám to dokázat pro čísla $r^{k+1}, \ldots r^m$, zbytek je bonus). Vektory $f(u_{k+1}), \ldots, f(u_m)$ jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří tak bázi vektorového prostoru $f(U)$. Jejich počet je $m-k$, takže $\dim f(U) = m-k$, což jsme potřebovali dokázat.

**Věta 5.5.** *Lineární zobrazení je prosté, právě když je jeho jádro rovno* $\{0\}$.

*Důkaz.* Tvrzení má tvar ekvivalence („právě když“), proto dokážeme obě implikace.

Nejprve budeme předpokládat, že lineární zobrazení $f: U \to V$ je prosté. Víme, že $0 \in U$ leží v jeho jádru. Kdyby v něm ležel i jiný vektor $u \in U$, pak $f(u) = 0$ a z injektivnosti plyne $u = 0$. Proto v jádru neleží žádný jiný vektor než nulový.

Předpokládejme naopak, že $\ker f = \{0\}$ a zvolme dva vektory $u_1, u_2 \in U$. Co by se stalo, kdyby $f(u_1) = f(u_2)$? To by znamenalo, že $f(u_1) - f(u_2) = 0$, což ovšem podle definice lineárního zobrazení znamená, že $f(u_1 - u_2) = 0$. Vektor $u_1 - u_2$ tedy leží v jádru zobrazení $f$, takže podle předpokladu $u_1 - u_2 = 0$ (0 je jediný vektor ležící v jádru). Z toho plyne, že $u_1 = u_2$, což dokazuje injektivnost (vyšli jsme z předpokladu, že $f(u_1) = f(u_2)$ a dospěli k závěru, že pak $u_1 = u_2$).

**Věta 5.6.** *Lineární zobrazení $f: U \to V$ je prosté, právě když existuje vektor $v \in V$ tak, že $f(u) = v$ pro právě jedno $u \in U$.*

*Důkaz.* Stačí dokázat, že pokud není prosté, pak vektor $v$ neexistuje (opačný směr je jednoduchý]. Předpokládejme tedy, že zobrazení prosté není. Pak existují dva různé vektory $u'_1, u'_2 \in U$ takové, že $f(u'_1) = f(u'_2) = v'$. Potom $f(u + v'_1 - v'_2) = v + v'_1 - v'_2 = v$. K vektoru $u$ jsme tedy našli jiný vektor s týmž obrazem $(u + v'_1 - v'_2)$, což je spor.

## 5.3 Matice lineárního zobrazení

Kromě báze $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorového prostoru $U$ zvolme navíc bázi $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ vektorového prostoru $V$ a vyjádřeme v ní prvky $f(u_1), \dots, f(u_m)$. Dostaneme $n$-tice

$$f(u_1)_\beta = \begin{pmatrix} f(u_1)^1_\beta \\ f(u_1)^2_\beta \\ \vdots \\ f(u_1)^n_\beta \end{pmatrix} \quad \dots \quad f(u_m)_\beta = \begin{pmatrix} f(u_m)^1_\beta \\ f(u_m)^2_\beta \\ \vdots \\ f(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}.$$

Pro souřadnicové vyjádření vektoru $f(u)$ v bázi $\beta$ platí

$$\begin{aligned} f(u)_\beta &= u^1_\alpha f(u_1)_\beta + \dots + u^m_\alpha f(u_m)_\beta \\ &= u^1_\alpha \begin{pmatrix} f(u_1)^1_\beta \\ f(u_1)^2_\beta \\ \vdots \\ f(u_1)^n_\beta \end{pmatrix} + \dots + u^m_\alpha \begin{pmatrix} f(u_m)^1_\beta \\ f(u_m)^2_\beta \\ \vdots \\ f(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

To lze napsat jako součin jisté matice s vektorem $u_\alpha$:

$$f(u)_\beta = \mathbf{M}^f_{\beta,\alpha} \cdot u_\alpha, \tag{5.9}$$

kde matice $\mathbf{M}^f_{\beta,\alpha}$ je dána takto:

$$\mathbf{M}^f_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} f(u_1)^1_\beta & f(u_2)^1_\beta & \cdots & f(u_m)^1_\beta \\ f(u_1)^2_\beta & f(u_2)^2_\beta & \cdots & f(u_m)^2_\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(u_1)^n_\beta & f(u_2)^n_\beta & \cdots & f(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Matice obsahuje ve sloupcích souřadnice obrazů vektorů báze $\alpha$ v bázi $\beta$. Jmenuje se *matice lineárního zobrazení $f$ vzhledem k bazím $\alpha$ a $\beta$.*

Jak vidíme z (5.10), matice $M^f_{\beta,\alpha}$ se zkonstruuje tak, že se do sloupců napíší souřadnicová vyjádření obrazů vektorů báze $\alpha$ v bázi $\beta$. To je dobré si zapamatovat, protože je to praktický způsob, jak matici lineárního zobrazení sestavit.

Užitečnost matice lineárního zobrazení vyplývá ze vztahu (5.9). Ten ukazuje, že známe-li matici lineárního zobrazení vzhledem k bazím $\alpha$ a $\beta$, lze s její pomocí vypočítat souřadnice (v bázi $\beta$) obrazu libovolného vektoru, známe-li jeho souřadnice v bázi $\alpha$.

Mějme třetí vektorový prostor $W$ a jeho bázi $\gamma$ a lineární zobrazení $g\colon V \to W$. Z asociativity násobení matic lze snadno odvotit následující stěžejní vzorec:

$$M^{g\circ f}_{\gamma,\alpha} = M^g_{\gamma,\beta} \cdot M^f_{\beta,\alpha}. \tag{5.11}$$

Lineární zobrazení $f\colon U \to U$ se nazývá *lineární transformace vektorového prostoru* $U$. Pro bázi $\alpha$ prostoru $U$ značíme matici $\mathrm{M}^f_{\alpha,\alpha}$ jednoduše $\mathrm{M}^f_\alpha$ a říkáme jí *matice lineární transformace* $f$ *vzhledem k bázi* $\alpha$.

Matice přechodu mezi dvěma bázemi je speciálním případem matice lineárního zobrazení. Podrobnosti najdete v úloze 5.15.

## ÚLOHY KE KAPITOLE 5

**5.1.** Ukažte, že podmínky (5.1) a (5.2) jsou opravdu ekvivalentní podmínce (5.3).

**5.2.** Zjistěte podle definice, které z funkcí z úlohy 2.6 jsou lineárními zobrazeními.

**5.3.** Charakterizujte všechna lineární zobrazení z $\mathrm{R}$ do $\mathrm{R}$.

**5.4.** Dokažte, že jádro lineárního zobrazení je vektorový podprostror.

**5.5.** Dokažte Větu 5.3.

**5.6.** Předpokládejme, že vektorové prostory $U$ a $V$ mají stejnou dimenzi a lineární zobrazení $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to U$ jsou taková, že složené zobrazení $g \circ f\colon U \to U$ je identita. Dokažte, že i složené zobrazení $f \circ g\colon V \to V$ je identita.

**5.7.** Na protipříkladě ukažte, že pokud $\dim U \neq \dim V$, pak tvrzení z předchozího příkladu neplatí.

**5.8.** Dokažte, že libovolný násobek lineárního zobrazení $f\colon U \to V$ je lineární zobrazení. Dokažte, že součet libovolných dvou lineárních zobrazení $f_1, f_2\colon U \to V$ je lineární zobrazení. (Násobek zobrazení $f$ číslem $r$ je zobrazení značené $rf$ a definované předpisem $(rf)(u) = r \cdot f(u)$. Součet zobrazení $f_1, f_2$ je zobrazení znašené $f_1 + f_2$ a definované předpisem $(f_1 + f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u)$.)

**5.9.** Je dáno zobrazení $f\colon \mathrm{R} \times U \to U$, které dvojici čísla $r \in \mathrm{R}$ a vektoru $u \in U$ přiřadí násobek vektoru $u$ číslem $r$. Je tedy dáno předpisem $f(r,u) = ru$. Je to lineární zobrazení?

**5.10.** Pro zadané číslo $r \in \mathrm{R}$ definujme zobrazení $f_r\colon U \to U$ předpisem $f_r(u) = ru$. Je toto zobrazení lineární?

**5.11.** Mějme zobrazení $\mathsf{d}\colon \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n$, které každému polynomu přiřadí jeho derivaci. Ukažte, že $\mathsf{d}$ je lineární zobrazení a najděte jeho jádro a obraz. Zkonstruujte jeho matici vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathrm{P}_n$.

**5.12.** Pro následující zobrazení z $\mathrm{R}^2$ do $\mathrm{R}^2$ dokažte, že jsou lineární, a najděte jejich matici vzhledem ke kanonické bázi:

- otočení kolem počátku o pravý úhel (proti směru hodinových ručiček),
- otočení kolem počátku o libovolný úhel $\alpha$,
- středová souměrnost se středem v počátku,
- osová souměrnost kolem osy prvního a třetího kvadrantu,

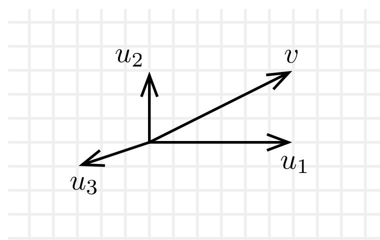
- zobrazení, které dvojici $(x,y)$ přiřadí dvojici $(0,y)$.

**5.13.** Lineární zobrazení zobrazí vektor o souřadnicích $(1,2,-1)$ na číslo 1 a vektor o souřadnicích $(2,-4,0)$ na číslo $-2$. Na jaké číslo zobrazí vektor o souřadnicích $(0,4,-1)$? A vektor o souřadnicích $(2,0,2)$?

**5.14.** Pro funkce z úlohy 2.6, které jsou lineárními zobrazeními, napište jejich matice vzhledem k bázi $\alpha = (1)$.

**5.15.** Dokažte, že pro báze $\alpha$ a $\beta$ vektorového prostoru $U$ platí $\mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{M}^{\mathrm{id}_U}_{\beta,\alpha}$, kde $\mathrm{id}_U$ je identické zobrazení prostoru $U$, tedy zobrazení dané předpisem $\mathrm{id}_U(u) = u$.

**5.16.** Vraťme se k úloze 4.3 a uvažujme lineární zobrazení $f\colon U \to \mathrm{R}$ takové, že $f(u_1) = 1$ a $f(u_3) = 1$. Napište matice $\mathrm{M}^f_{\beta,\alpha}$, kde $\alpha$ jsou postupně báze $\alpha_1$, $\alpha_2$ a $\alpha_3$ (tj. $\alpha_1 = (u_1,u_2)$, $\alpha_2 = (u_2,u_3)$ a $\alpha_3 = (u_3,u_1)$) a $\beta$ je báze $\mathrm{R}$ tvořená vektorem $-1$. Čemu se rovná $f(v)$? Ověřte na nalezených maticích. Abyste měli obrázek po ruce zopakuji ho tady.




Obrázek 5.1: Obrázek k úloze 4.3 znovu

**5.17.** Podobně jako v předchozím příkladě napište všechny matice $\mathrm{M}^f_{\alpha,\beta}$, kde $f\colon \mathrm{R} \to U$ je lineární zobrazení takové, že $f(1) = v$ a báze $\alpha$ a $\beta$ jsou stejné jako v předchozím příkladě. Čemu se rovná $f(2)$? Ověřte na nalezených maticích.

**5.18.** Navažme ještě jednou na úlohu 4.3 a uvažme lineární zobrazení $f\colon U \to U$ takové, že $f(u_1) = u_2$ a $f(u_2) = u_3$. Najděte matice zobrazení $f$ vzhledem ke všem možným dvojicím bazí $\alpha_1$, $\alpha_2$ a $\alpha_3$. Čemu se rovná $f(v)$? Odhadněte a pak ověřte na nalezených maticích.

# Kapitola 6

# Hodnost matice

Uvažujme matici $M$ o $m$ sloupcích a $n$ řádcích. Její sloupce jsou vektory v $\mathrm{R}^n$, řádky vektory v $\mathrm{R}^m$. Součin matice s vektorem $u \in \mathrm{R}^m$, tedy $M \cdot u$ je vektor v $\mathrm{R}^n$. Zobrazení $f^M : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$ dané předpisem

$$f^M(u) = M \cdot u \tag{6.1}$$

je lineární zobrazení a matice $M$ je jeho maticí vzhledem ke kanonickým bazím v $\mathrm{R}^m$ a $\mathrm{R}^n$.

Každá hodnota $f^M(u)$ je podle uvedeného vzorečku lineární kombinací sloupců matice s koeficienty danými složkami vektoru $u$. Všechny možné takové lineární kombinace tedy tvoří obraz lineárního zobrazení $f^M$, neboli množinu $\operatorname{im} f^M$. Jde, jak víme, o vektorový podprostor vektorového prostoru $\mathrm{R}^n$, a to o podprostor generovaný sloupci matice. Jeho dimenze se nazývá *hodnost matice $M$* a značí $\operatorname{rank} M$.

Dá se také říci, že hodnost matice $M$ je maximální počet jejích lineárně nezávislých sloupců. (Prostě ze sloupců matice postupně odebíráme sloupce, které jsou lineární kombinací ostatních, dokud to jde. Zbytek je báze podprostoru generovaného sloupci a počet sloupců v ní je tedy jeho dimenze.)

**Věta 6.1.** *Pro matice $M$ a $N$, pro které existuje součin $M \cdot N$ platí $\operatorname{rank}(M \cdot N) \leq \operatorname{rank} M$ a $\operatorname{rank}(M \cdot N) \leq \operatorname{rank} N$.*

Hodnost matice $M$ je také rovna dimenzi vektorového podprostoru prostoru $\mathrm{R}^m$ generovaného řádky matice. To říká následující tvrzení:

**Věta 6.2.** *Hodnost matice $M$ je rovna hodnosti matice $M^\top$.*

*Důkaz.* Uvažme vektor $u \in \mathrm{R}^m$ takový, že $M \cdot u = 0$ — vektor leží v jádru lineárního zobrazení $f^M$. Pak samozřejmě i $(M^\top \cdot M) \cdot u = 0$. Vektor tedy leží i v jádru zobrazení $f^{M^\top M}$.

Naopak, jestliže $M^\top \cdot M \cdot u = 0$, pak $u^\top \cdot M^\top \cdot M \cdot u = 0$, což je ekvivalentní s $(M \cdot u)^\top \cdot (M \cdot u) = 0$. K tomu ale může dojít jedině, když $M \cdot u = 0$ (představte si to). Celkově tedy

$M \cdot u = 0$ právě když $(M^\top \cdot M) \cdot u = 0$. Jádro zobrazení $f^M$ je rovno jádru zobrazení $f^{M^\top M}$. (Tady je dobré nakreslit si vhodný obrázek.)

Nechť dimenze jádra zobrazení $f^M$ je rovna $k$. Pak podle Věty 5.4 je $\dim \operatorname{im} f^M = m - k$ a také $\dim \operatorname{im} f^{M^\top M} = m - k$. Z druhého vztahu plyne $\dim \operatorname{im} f^{M^\top} \geq m - k$, a tedy (Věta 6.1) $\dim \operatorname{im} f^M \leq \dim \operatorname{im} f^{M^\top}$.

Pokud matice $M$ a $M^\top$ vyměníme (to lze, protože $(M^\top)^\top = M$), dostaneme opačnou nerovnost $\dim \operatorname{im} f^{M^\top} \leq \dim \operatorname{im} f^M$, takže $\dim \operatorname{im} f^M = \dim \operatorname{im} f^{M^\top}$, což znamená, že hodnosti matic $M$ a $M^\top$ jsou shodné.

Maximální možná hodnost matice $M$ je tedy rovna $\min(m, n)$.

# Kapitola 7

# Determinant

## 7.1 Permutace

Přečtěte si v materiálech, které jsem vám zveřejnil.

## 7.2 Determinant

Přečtěte si v materiálech, které jsem vám zveřejnil.

# Kapitola 8

# Inverzní matice a orientace vektorových prostorů

## 8.1 Inverzní matice

Mějme čtvercovou matici $M$ o $m$ řádcích a $m$ sloupcích. *Inverzní maticí matice $M$* nazýváme matici $N$ takovou, že

$$N \cdot M = E \tag{8.1}$$

(jednotková matice). Inverzní matici k matici $M$ značíme $M^{-1}$.

Chápeme-li matici $M$ jako matici lineárního zobrazení $f^M : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$ z kapitoly 6, tedy zobrazení

$$f^M(u) = M \cdot u,$$

pak podle (5.11) pro každé $u \in \mathrm{R}^m$ platí

$$f^N(f^M(u)) = N \cdot M \cdot u = E \cdot u = u.$$

Podle Úlohy 5.6 je i obrácená kompozice zobrazení $f^N$ a $f^M$ identita, tedy

$$f^M(f^N(v)) = v$$

pro každé $v \in \mathrm{R}^m$. Odtud plyne

**Věta 8.1.** *Pokud čtvercové matice $M$ a $N$ splňují 8.1, pak i*

$$M \cdot N = E. \tag{8.2}$$

Dalším důsledkem tohoto poznatku a vztahu mezi determinantem a hodností je

**Věta 8.2.** *Inverzní matice k matici $M$ existuje, právě když zobrazení $f^M$ je izomorfismus, což je právě když má matice $M$ maximální hodnost.*

Na cvičení si ukážete jednoduchý způsob, jak k dané čtvercové matici inverzní matici najít.

Obecně lze použít také vzoreček

$$M^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A},$$

kde $\operatorname{adj} A$ je *adjungovaná matice* matice $A$, což je transponovaná matice algebraických doplňků prvků matice $A$.

## 8.2 Orientace vektorových prostorů

Mějme dvě báze $\alpha$ a $\beta$ vektorového prostoru $U$ dimenze $m$. Matice přechodu $M_{\beta,\alpha}$ má inverzi (kterou je matice $M_{\alpha,\beta}$). Je tedy $\det M_{\beta,\alpha} \neq 0$.

Řekneme, že báze $\alpha$ a $\beta$ jsou *souhlasně orientované*, jestliže $\det M_{\beta,\alpha} > 0$.

**Věta 8.3.** *Relace „býti souhlasně orientované“ je ekvivalence na množině všech bazí vektorového prostoru $M$. Příslušný rozklad má pro $m > 0$ právě dvě třídy.*

*Důkaz.* Reflexivita: Báze $\alpha$ je souhlasně orientovaná sama se sebou, protože matice $M_{\alpha,\alpha}$ je jednotková a tedy $\det M_{\alpha,\alpha} = 1 > 0$.

Symetrie: Pokud $\det M_{\beta,\alpha} > 0$, pak

$$\det M_{\alpha,\beta} = \det(M_{\beta,\alpha})^{-1} = \frac{1}{\det M_{\beta,\alpha}} > 0$$

(determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu původní matice).

Tranzitivita: Předpokládejme, že $\det M_{\beta,\alpha} > 0$ a $\det M_{\gamma,\beta} > 0$. Jelikož determinant součinu dvou matic je roven součinu jejich determinantů, dostáváme

$$\det M_{\gamma,\alpha} = \det(M_{\gamma,\beta} \cdot M_{\beta,\alpha}) = \det M_{\gamma,\beta} \cdot \det M_{\beta,\alpha} > 0.$$

Na závěr dokážeme tvrzení o počtu tříd rozkladu. Začneme volbou dvou bazí $\alpha$ a $\beta$ vektorového prostoru $V$ (pro $m = 0$ dvě různé báze nenajdeme), které nejsou souhlasně orientované (takové dvě báze vždy existují. Proč?). Platí $M_{\beta,\alpha} < 0$. Pro libovolnou třetí bázi $\gamma$ platí

$$M_{\gamma,\alpha} = M_{\gamma,\beta} \cdot M_{\beta,\alpha}.$$

Determinanty $\det M_{\gamma,\alpha}$ a $\det M_{\gamma,\beta}$ tedy mají opačná znaménka. Jeden z nich je tedy kladný, z čehož plyne, že báze $\gamma$ je souhlasně orientovaná s $\alpha$ nebo $\beta$.

Třídy ekvivalence z předchozí věty se nazývají *orientace vektorového prostoru* $U$. Každý vektorový prostor dimenze alespoň 1 má tedy právě dvě orientace. Dvě různé orientace se také nazývají opačné. Každá báze vektorového prostoru určuje právě jednu jeho orientaci (tu, do které patří). Pokud je na vektorovém prostoru zadána orientace, hovoříme o *orientovaném vektorovém prostoru*. Báze, které do této orientace patří, se nazývají *kladně orientované*. Ostatní jsou *záporně orientované*.

Izomorfismus $f : U \to V$ orientovaných vektorových prostorů se nazývá *orientovaný*, jestliže převádí kladně orientované báze na kladně orientované báze, neboli: je-li $(u_1, \dots, u_m)$ kladně orientovaná báze prostoru $U$, je $(f(u_1), \dots, f(u_m))$ kladně orientovaná báze prostoru $V$.

Na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathsf{R}^m$ uvažujeme jako výchozí orientaci danou kanonickou bazí.

# Kapitola 9

# Soustavy lineárních rovnic

## 9.1 Základy

*Soustava $n$ lineárních rovnic o $m$ neznámých* je soustava rovnic

$$\begin{aligned} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_m x^m &= b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_m x^m &= b^2 \\ &\vdots \\ a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \cdots + a^n_m x^m &= b^n \end{aligned} \tag{9.1}$$

(Nezapomeňte, že horní indexy jsou jen indexy, nikoli mocniny.)

Symboly $x^1, \dots, x^m$ označují *neznámé* soustavy rovnic. Ostatní symboly v (9.1) značí konkrétní čísla: čísla $a^j_i$ jsou *koeficienty* soustavy a $b^j$ *pravé strany* ($i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$).

Jsou-li všechny pravé strany rovny nule, říkáme, že soustava rovnic je *homogenní*. Obecný případ je pak *nehomogenní* soustava lineárních rovnic.

*Řešení* soustavy rovnic (9.1) je $m$-tice čísel $u = (u^1, \dots, u^m)$ taková, že když v rovnicích za každou neznámou $x^i$ dosadíme hodnotu $u^i$, dostaneme rovnosti.

Obecně vzato, soustava rovnic by mohla mít jedno řešení, mohla by jich mít i víc, a také by nemusela mít řešení žádné. Všechny tyto možnosti mohou u soustav lineárních rovnic nastat s tím, že pokud je řešení více než jedno, je jich vždy nekonečně mnoho (není těžké najít příklady). Proto obecně mluvíme o *množině řešení soustavy rovnic*, která tedy může být jednoprvková, nekonečná nebo prázdná.

Řešení soustavy lineárních rovnic se většinou hledá pomocí *ekvivalentních úprav*, které spočívají v postupném převádění soustavy na jinou soustavu tak, aby se množina řešení nezměnila. Jsou to úpravy, pro které platí, že každé řešení původní soustavy je i řešením soustavy upravené a že od upravené soustavy se lze opět pomocí takové úpravy vrátit k soustavě původní. Základní ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic jsou tyto:

1. Výměna dvou rovnic. Opačná úprava: tatáž výměna dvou rovnic.
2. Vynásobení jedné rovnice nenulovým číslem. Opačná úprava: vynásobení rovnice převrácenou hodnotou čísla.
3. Přičtení $k$-násobku jedné rovnice k druhé. Opačná úprava: přičtení $(-k)$-násobku první rovnice k druhé.

## 9.2 Maticový tvar

Když označíme

$$M = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_m \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu rovnic (9.1) přepsat takto:

$$M \cdot u = v_0. \tag{9.2}$$

Je to tzv. *maticový tvar* soustavy rovnic (9.1). (Jde vlastně o jednu rovnici, ale vektorovou; na levé i pravé straně rovnice máme vektor.) Dává nám lépe pochopit, o co v soustavách rovnic jde. Máme dánu matici $M$ a číselný vektor $v_0$, který má stejně složek jako matice $M$ řádků. A hledáme číselný vektor $u$, který splňuje rovnici (9.2). V soustavách lineárních rovnic je tedy neznámou vektor. O tomto tématu ještě více za chvíli.

Matici $M$ nazýváme *maticí soustavy* (9.1), vektor $v_0$ *vektorem pravých stran* a vektor $u$ *vektorem neznámých*.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic uvedené před chvílí se tedy dají vyjádřit násobením regulární maticí. Máme-li regulární čtvercovou matici $A$ typu $n \times n$, pak jistě pro každý vektor $u$ splňující rovnici (9.2) platí i

$$(A \cdot M) \cdot u = A \cdot v_0$$

(což by byl maticový tvar soustavy rovnic po úpravě). A vzhledem k tomu, že matice $A$ je regulární, má i inverzi, takže úpravou nové rovnice se můžeme dostat zpět ke staré:

$$(A^{-1} \cdot A \cdot M) \cdot u = (A^{-1} \cdot A) \cdot v_0,$$

takže

$$M \cdot u = v_0.$$

Jak vyjádřit jednoduché řádkové úpravy matic násobením jinými maticemi jsme si už ukazovali na dřívějších přednáškách. Ukážu jen dva jednoduché příklady.

Výměnu prvního a druhého řádku v matici o třech řádcích realizujeme vynásobením maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přičtení dvojnásobku prvního řádku ke druhému maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obě matice jsou regulární. Jejich inverzní matice realizují opačnou řádkovou úpravu. Tedy v případě první matice opět výměnu prvních dvou řádků (inverzní matice je tedy tatáž), v případě druhé odečtení dvojnásobku prvního řádku od druhého.

Když děláme základní ekvivalentní úpravy soustavy rovnic (9.1), pracujeme samozřejmě i s pravými stranami. Stejně, když upravujeme matici $\boldsymbol{M}$ v maticovém tvaru (9.2), musíme upravovat i vektor pravých stran (v uvedeném výpočtu násobíme maticí $A$ i vektor pravých stran). To si můžeme zjednodušit vytvořením nové matice $\bar{\boldsymbol{M}}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{M}$ přidáním vektoru pravých stran. Symbolicky:

$$\bar{M} = (M \mid v_0)$$

Matici $\bar{\boldsymbol{M}}$ říkáme *rozšířená matice soustavy rovnic* (9.1). Řádkové úpravy pak můžeme dělat prostě na ní.

Systematicky se řádkové úpravy matice $\bar{\boldsymbol{M}}$ dělají tak, že ji převádíme *Gaussovou eliminační metodou* na tzv. *schodovitý tvar*. Z něj se pak množina řešení soustavy dá snadno zjistit. Podrobnosti o metodě se dozvíte na cvičení.

Maticový tvar nám ještě pomůže k tomuto poznatku: součin $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{u}$ představuje lineární kombinaci sloupců matice $\boldsymbol{M}$ s koeficienty rovnými složkám vektoru $\boldsymbol{u}$ (to už víme). Aby soustava měla řešení, musí být vektor pravých stran lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{M}$. (Jinými slovy, musí ležet ve vektorovém podprostoru $\mathrm{R}^n$ generovaném sloupci matice.) Rozšířená matice soustavy musí mít tedy stejnou hodnost, jako matice $\boldsymbol{M}$, protože vektorový podprostor generovaný sloupci matic $\boldsymbol{M}$ a $\bar{\boldsymbol{M}}$ musí být týž (a má tedy stejnou dimenzi, což je hodnost matice). Dostáváme první důležitý teoretický poznatek o soustavách lineárních rovnic:

**Věta 9.1** (Frobeniova)**.** *Soustava rovnic* (9.1) *má řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

*Důkaz.* Má-li soustava řešení, znamená to, že vektor $v_0$ je lineární kombinací sloupců matice $M$. Přidáme-li k ní tento vektor, hodnost se tedy nezvýší.

Naopak, pokud soustava řešení nemá, vektor $v$ není lineární kombinací sloupců matice $M$. Neleží tedy v podprostoru generovaném sloupci. Dimenze podprostoru generovaném sloupci rozšířené matice je tedy větší.

Další tvrzení o souvislosti hodnosti matice $M$ a řešení soustavy (9.1):

**Věta 9.2.** *1. Soustava* (9.1) *má řešení pro každý vektor $v_0$, právě když hodnost její matice je $n$.*

*2. Soustava* (9.1) *má právě jedno řešení, právě když hodnost její matice je rovna hodnosti matice rozšířené a ta je rovna $m$.*

Význam obou částí věty snadněji pochopíme, až si vysvětlíme vztah soustav lineárních rovnic a lineárních zobrazení. To uděláme v následující podkapitole, kde uvedeme i důkaz věty.

## 9.3 Lineární zobrazení v soustavách lineárních rovnic

Jak víme, zobrazení, které číselnému vektoru přiřadí součin nějaké matice s ním, je lineární. Přesněji řečeno, pro matici $M$ zavedenou dříve, je zobrazení $f^M : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$, které vektoru $u \in \mathrm{R}^m$ přiřadí součin $M \cdot u$, lineární. Podle toho, jak jsem zobrazení teď definoval, je lze zadat předpisem

$$f^M(u) = M \cdot u. \tag{9.3}$$

Naši soustavu lineárních rovnic v maticovém tvaru (9.2) tedy můžeme přepsat takto:

$$f^M(u) = v_0. \tag{9.4}$$

Naopak, libovolné lineární zobrazení $f : U \to V$ lze po volbě bazí $\alpha$ vektorového prostoru $U$ a $\beta$ vektorového prostoru $V$ charakterizovat maticí $M^f_{\beta,\alpha}$. Úvahy o soustavách lineárních rovnic se tedy nevztahují jen na lineární zobrazení aritmetických vektorových prostorů, ale na všechna lineární zobrazení libovolných vektorových prostorů konečné dimenze.

Podívejme se nyní, co lze říci o soustavách lineárních rovnic z pohledu lineárních zobrazení. Začneme homogenními soustavami.

Homogenní soustava lineárních rovnic zapsaná ve tvaru (9.4) je

$$f^M(u) = 0. \tag{9.5}$$

Množina řešení soustavy je tedy přesně jádro lineárního zobrazení $f^M$. Ze znalosti toho, jak vypadá jádro lineárního zobrazení (Věta 5.2), tedy můžeme říci, že množina všech řešení homogenní soustavy je určitě vektorový podprostor $\mathrm{R}^m$. K nalezení řešení stačí nalézt bázi tohoto podprostoru, protože všechna další řešení jsou pak lineárními kombinacemi prvků báze. Taková báze se nazývá *fundamentální systém řešení* dané homogenní soustavy lineárních rovnic.

Počet vektorů fundamentálního systému řešení vyplývá z Věty 5.4. Je roven dimenzi jádra zobrazení $f^M$ a hodnost matice $M$ je rovna dimenzi obrazu $f^M(\mathrm{R}^m)$. Počet vektorů fundamentálního systému řešení je tedy $m - \operatorname{rank} M$.

Teď se podívejme na nehomogenní soustavy lineárních rovnic. Množina vektorů $u \in \mathrm{R}^m$ splňujících nehomogenní vektorovou rovnici (9.4), již není vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{R}^m$. To je jasné například z této úvahy: kdyby vektor $u$ byl řešením rovnice pro $v_0 \neq 0$ a množina všech řešení byla vektorovým podprostorem, pak by i vektor $2u$ byl řešením. Platilo by tedy

$$v_0 = f^M(2u) = 2f^M(u) = 2v_0.$$

Vlastnost $v_0 = 2v_0$ má ovšem pouze nulový vektor, kterážto možnost je ale vyloučena předpokladem.

Strukturu množiny všech řešení rovnice charakterizuje následující věta. Pracuje s přidruženou homogenní rovnicí (9.5).

**Věta 9.3.** *Jestliže $u_0 \in \mathrm{R}^m$ je vektor splňující rovnici* (9.4)*, pak vektor $u' \in \mathrm{R}^m$ je řešením* (9.4)*, právě když existuje řešení $u$ homogenní rovnice* (9.5) *takové, že*

$$u' = u + u_0. \tag{9.6}$$

*Důkaz.* Tvrzení má tvar ekvivalence. Dokážeme zvlášť oba směry. Předpokládejme, že $u'$ je řešením rovnice (9.4) a položme $u = u' - u_0$. Pak $u' = u + u_0$ a

$$f^M(u) = f^M(u' - u_0) = f^M(u') - f^M(u_0) = v_0 - v_0 = 0.$$

Vektor $u$ je tedy řešením homogenní rovnice a implikace zjeva doprava je dokázána.

Předpokládejme naopak, že pro nějaké řešení $u$ homogenní rovnice platí (9.6). Pak

$$f^M(u') = f^M(u + u_0) = f^M(u) + f^M(u_0) = 0 + v_0 = v_0.$$

Vektor $u'$ je tedy řešením nehomogenní rovnice.

Tím je důkaz hotov.

Důkaz bylo možné vést stejným způsobem pomocí matice $M$ místo lineárního zobrazení $f^M$. Používat lineární zobrazení ale považuji za vhodnější.

Tvrzení předchozí věty se často formuluje takto: *Obecné řešení nehomogenní rovnice* (9.4) *je rovno součtu obecného řešení přidružené homogenní rovnice* (9.5) *a partikulárního řešení nehomogenní rovnice* (9.4).

K nalezení obecného řešení nehomogenní rovnice stačí najít její jedno konkrétní (*partikulární*) řešení a obecné řešení rovnice homogenní. Tento poznatek má význam i pro jiné typy rovnic (diferenciální, diferenční) používané v různých oblastech matematiky, fyziky i techniky.

A nyní slíbený důkaz. Uvedu jen hrubý náčrt (chtělo by to trochu víc práce, jsou v něm díry). Důkaz ale ukazuje, jak tvrzení o matici soustavy hezky plyne z vlastností lineárních zobrazení.

*Důkaz Věty 9.2.* 1. Předpoklad vlastně říká, že zobrazení $f^M$ je surjektivní. Dimenze jeho obrazu je tedy rovna $n$. To je ovšem přesně (podle definice v Kapitole 6) hodnost matice $M$. 2. Z Věty 5.6 plyne, že zobrazení $f^M$ je prosté. Podle Věty 5.5 má jeho jádro nulovou dimenzi. Podle Věty 5.4 je tedy $\dim \operatorname{im} f^M = \dim U = \operatorname{rank} M$.

## 9.4 Soustavy se čtvercovou maticí

Na závěr ukážeme několik výsledků pro soustavy rovnic o stejném počtu rovnic jako neznámých. Máme tedy $n = m$ a matice soustavy je čtvercová.

**Věta 9.4.** *Soustava rovnic (9.2) se čtvercovou maticí má právě jedno řešení, právě když matice $M$ je regulární. Toto řešení pak lze vypočítat vztahem*

$$u = M^{-1} \cdot v_0. \tag{9.7}$$

*Důkaz.* Cvičení.

Následující věta ukazuje, jek lze řešení soustavy rovnic s regulární čtvercovou maticí vypočítat přímým dosazením do vzorečku.

**Věta 9.5** (Cramerovo pravidlo)**.** *Označme $M_i$ matici vzniklou z matice $M$ nahrazením $i$-tého sloupce vektorem $v_0$. Pak je-li matice $M$ čtvercová a regulární, platí pro $i$-tou složku $u^i$ řešení soustavy (9.2) vztah*

$$u^i = \frac{\det M_i}{\det M}. \tag{9.8}$$

### ÚLOHY KE KAPITOLE 9

**9.1.** Proč nemůže mít soustava lineárních rovnic právě dvě řešení?

**9.2.** Dokažte Větu 9.4.

# Kapitola 10

# Skalární součin 1

Skalární součin na vektorovém prostoru je struktura, pomocí níž lze definovat délku vektoru a odchylku mezi vektory. V této a příští kapitole uvádíme základní vlastnosti skalárního součinu.

## 10.1 Definice a základní vlastnosti

*Skalární součin* (*vnitřní součin*, *dot product*, *inner product*) na vektorovém prostoru $U$ je zobrazení $\cdot : U \times U \to \mathrm{R}$, které je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou, což znamená, že pro každé tři vektory $u, v, w \in U$ a dva skaláry $c, d \in \mathrm{R}$ platí

$$u \cdot u > 0 \quad \text{pro } u \neq 0, \tag{pozitivní definitnost}$$
$$u \cdot v = v \cdot u, \tag{symetrie}$$
$$(cu + dv) \cdot w = c(u \cdot w) + d(v \cdot w). \tag{linearita v prvním argumentu}$$

Vektorové prostory se skalárním součinem se někdy nazývají *unitární prostory*. V celé této kapitole budeme pracovat s vektorovým prostorem $U$ dimenze $m$, na kterém je dán skalární součin.

Na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathrm{R}^m$ je definován tzv. *standardní skalární součin* známým předpisem

$$u \cdot v = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^m v^m, \tag{10.1}$$

kde $u^i$ resp. $v^i$ jsou složky číselných vektorů $u$ resp. $v$.

Z definice lze odvodit další vztahy platné pro skalárního součin, například

$$u \cdot 0 = 0, \tag{10.2}$$
$$w \cdot (cu + dv) = c(w \cdot u) + d(w \cdot v). \tag{linearita ve druhém argumentu}$$

Podmínkám linearity v prvním a druhém argumentu říkáme dohromady podmínka *bilinearity*. Díky ostatním vlastnostem skalárního součinu ovšem druhá plyne z první.

Vektory $u, v \in U$ se nazývají *kolmé* (*ortogonální*), jestliže $u \cdot v = 0$. Přinejmenším na příkladech si můžeme ověřit, že v $\mathrm{R}^2$ pojem kolmosti vektorů splývá s kolmostí, jak ji známe z elementární geometrie.

Základní vlastností skalárního součinu je *Schwarzova nerovnost*. Uvádíme ji v následující větě. V literatuře najdeme mnoho různých důkazů Schwarzovy nerovnosti, žádný z nich není příliš intuitivní (podobně jako sama nerovnost). Důkaz vybraný zde má alespoň tu výhodu, že je krátký.

**Věta 10.1** (Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $u$ a $v$ prostoru $U$ platí*

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v). \tag{10.3}$$

*Rovnost nastává, právě když jsou vektory $u$ a $v$ lineárně závislé.*

*Důkaz.* Jsou-li vektory $u$ a $v$ lineárně závislé, je $u$ násobkem $v$ nebo $v$ násobkem $u$. V obou případech snadno dostaneme, že se levá a pravá strana nerovnosti (10.3) rovnají.

Nyní předpokládejme, že vektory $u$ a $v$ jsou lineárně nezávislé. Pro libovolné číslo $x$ pak platí $(xu+v) \cdot (xu+v) > 0$. Z bilinearity dostáváme

$$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + v \cdot v > 0.$$

Vlevo máme kvadratický polynom v proměnné $x$. Jeho diskriminant

$$D = 4(u \cdot v)^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

musí být záporný, což znamená přesně $(u \cdot v)^2 < (u \cdot u)(v \cdot v)$.

Vektor $u \in U$ se nazývá *kolmý na vektorový podprostor $V \subseteq U$*, jestliže je kolmý na libovolný vektor $v \in V$. *Ortogonální doplněk vektorového podprostoru $V \subseteq U$* je vektorový podprostor $U$ složený z vektorů kolmých ke každému vektoru z $V$. Dva vektorové podprostory $V_1, V_2 \subseteq U$ jsou *kolmé* (*ortogonální*), jsou-li libovolné dva vektory $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ kolmé.

## 10.2 Délka a odchylka

*Délka vektoru $u$* (také *norma*) se značí $\|u\|$ a je definována předpisem

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}. \tag{10.4}$$

Pokud $\|u\| = 1$, vektor se nazývá *jednotkový*. Každý vektor má nenulovou délku, právě když je nenulový. Z libovolného nenulového vektoru můžeme vytvořit jednotkový vektor tzv. *normováním*, které spočívá ve vynásobení vektoru převrácenou hodnotou jeho délky:

$$u_0 = \frac{1}{\|u\|} u.$$

Pomocí délek vektorů lze Schwarzovu nerovnost přepsat takto:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| . \tag{10.5}$$

S použitím této nerovnosti můžeme celkem snadno dokázat tři základní vlastnosti délky vektoru:

**Věta 10.2.** *Pro libovolné dva vektory $u, v \in U$ a číslo $c \in \mathrm{R}$ platí*

$$\|u\| > 0 \quad \textit{pro } u \neq 0, \tag{10.6}$$

$$\|cu\| = |c| \|u\| , \tag{10.7}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| . \tag{10.8}$$

Podmínce (10.8) se říká *trojúhelníková nerovnost.*

*Důkaz Věty 10.2.* První dvě podmínky plynou přímo z definice skalárního součinu. Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost. Podle nerovnosti (10.5) a vlastností skalárního součinu platí

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

odkud již trojúhelníková nerovnost snadno plyne.

Podmínky (10.6), (10.7) a (10.8) se v matematice používají k definici délky vektoru na vektorovém prostoru, která není vypočítána ze skalárního součinu pomocí vztahu (10.4). Následující příklad ukazuje dva nejdůležitější příklady, které se používají i v informatice (analýze dat).

**Příklad 10.1.** Následující dvě zobrazení $\|\cdot\|_1 : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ a $\|\cdot\|_\infty : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ splňují podmínky (10.6), (10.7) a (10.8):

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \left|u^1\right| + \left|u^2\right| + \cdots + \left|u^m\right| , \\ \|u\|_\infty &= \max\left(\left|u^1\right|, \left|u^2\right|, \ldots, \left|u^m\right|\right) . \end{aligned}$$

Nyní ukážeme, jak lze pomocí skalárního součinu a délky vektoru definovat odchylku vektorů. Podle nerovnosti (10.5) platí

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1,$$

takže arkus kosinus v následující definici vždy existuje. *Odchylka $\vartheta_{u,v}$ vektorů $u$ a $v$* je definována předpisem

$$\vartheta_{u,v} = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} . \tag{10.9}$$

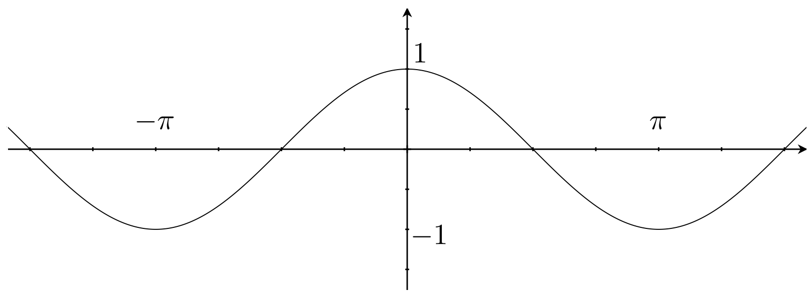
Z této definice vyplývá následující vztah mezi skalárním součinem vektorů $u$ a $v$ a jejich odchylkou $\vartheta_{u,v}$:

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \vartheta_{u,v} \tag{10.10}$$

**Příklad 10.2.** Jsou-li vektory $u$ a $v$ jednotkové, dostáváme ze vztahu (10.10)

$$u \cdot v = \cos \vartheta_{u,v},$$

což nám umožní udělat si dobrou představu o skalárním součinu jednotkových vektorů: je to kosinus úhlu, který svírají. Na obrázku 10.1 vidíme graf funkce kosinus. Z něj by mělo



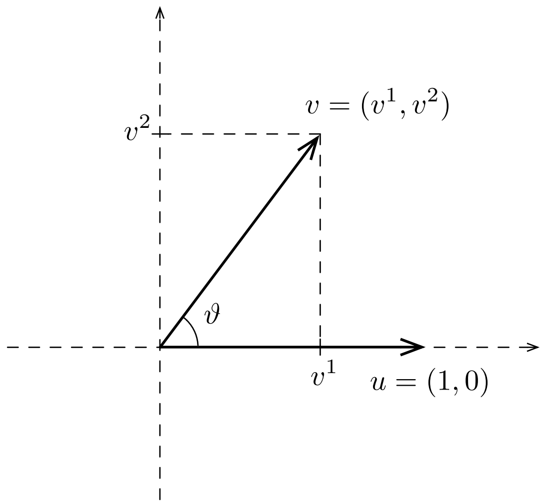

Obrázek 10.1: Graf funkce cos

být patrné, že pokud vektory svírají úhel $\frac{\pi}{2}$, je jejich skalární součin nulový ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$) a pokud jsou totožné (a tedy jejich odchylka je nulová), je jejich skalární součin roven jedné ($\cos 0 = 1$). To také odpovídá tomu, že tyto vektory jsou jednotkové. Skalární součin opačných jednotkových vektorů je $-1$ a odchylka $\pi$.

**Příklad 10.3.** V minulém příkladu je ovšem jedna záludnost: odchylku vektorů jsme pomocí skalárního součinu *definovali*, takže okolnost, že skalární součin jednotkových vektorů je roven kosinu jejich odchylky, je vlastně triviální a neobsahuje žádnou novou informaci. Zajímavou se stane v momentě, kdy nějak ověříme, že definice odchylky vektorů pomocí vztahu (10.9) odpovídá pozorované skutečnosti, konkrétně tomu, co o funkci kosinus víme z elementární geometrie.

Obrázek 10.2 znázorňuje dva jednotkové vektory $u, v \in \mathrm{R}^2$. Vektor $u$ je roven $(1,0)$, vektor $v$ je obecný, $v = (v^1, v^2)$. Standardní skalární součin $u \cdot v$ je roven $1v^1 + 0v^2 = v^1$. Pro kosinus úhlu $\vartheta$ platí $\cos \vartheta = v^1 / \|v\|$ (podíl délek přilehlé odvěsny a přepony v pravoúhlém trojúhelníku), je tedy také roven $v^1$.

Kdybychom vektory $u$ a $v$ „pootočili“ tak, aby zůstaly zachovány jejich délky i úhel $\vartheta$, zůstane jejich skalární součin pořád stejný. Proč tomu tak je, zjistíme později.




Obrázek 10.2: Jednotkové vektory $u, v \in \mathrm{R}^2$. Vidíme, že $\cos\vartheta = v^1$, což je rovno (standardnímu) skalárnímu součinu $u \cdot v$.

Další poznatky, které uvedeme na závěr této části, vyplývají z následujícího vyjádření délky rozdílu dvou vektorů:

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u - v\cdot u - u\cdot v + v\cdot v \\ &= \|u\|^2 - 2(u\cdot v) + \|v\|^2,\end{aligned}$$

takže

$$2(u\cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2. \tag{10.11}$$

Tato rovnost je zajímavá hned z několika důvodů. Za prvé ukazuje, že skalární součin vektorů $u$ a $v$ lze spočítat čistě pomocí délek vektorů $u$, $v$ a $u-v$. Této skutečnosti později využijeme.

Za druhé, levá strana rovnosti je nulová právě když je nulová strana pravá, což vede k následující verzi známé Pythagorovy věty:

**Věta 10.3** (Pythagorova)**.** *Pro každé dva vektory $u$ a $v$ platí*

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2,$$

*právě když jsou ortogonální.*

A za třetí, podle (10.10) a (10.11):

**Věta 10.4** (kosinová)**.** *Pro libovolné dva vektory $u$ a $v$ platí*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u\|\,\|v\| \cos \vartheta_{u,v} = \|u - v\|^2 . \tag{10.12}$$

## ÚLOHY KE KAPITOLE 10

**10.1.** Dokažte, že vektory $u$ a $v$ jsou ortogonální, právě když

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

**10.2.** Najděte (nestandardní) skalární součin v $\mathrm{R}^2$ takový, aby vektory $(2,0)$ a $(1,10)$ tvořily ortonormální bázi. Kolik takových skalárních součinů existuje?

**10.3.** Mějme bázi $\alpha$ vektorového prostoru $U$ dimenze $m$ a definujme skalární součin na $U$ předpisem

$$u \cdot v = u_\alpha \cdot v_\alpha$$

(na pravé straně je standardní skalární součin v $\mathrm{R}^m$ souřadnicových vyjádření vektorů $u$ a $v$ v bázi $\alpha$). Ukažte, že opravdu jde o skalární součin. Dále dokažte, že vzhledem k tomuto skalárnímu součinu je $\alpha$ ortonormální báze.

**10.4.** Uveďte příklad vektorového prostoru se skalárním součinem $U$, jeho báze $\alpha$ a vektorů $u, v \in U$ tak, aby neplatil vztah (11.1).

**10.5.** Dokažte, že vektor je nulový, právě když je kolmý na libovolný vektor.

**10.6.** V příkladě 10.1 jsme ukázali dva jiné způsoby zavedení délky vektoru v $\mathrm{R}^m$ než s použitím standardního skalárního součinu: pomocí zobrazení $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$. Lze pomocí těchto zobrazení a vztahu (10.11) zavést na $\mathrm{R}^m$ skalární součin?

**10.7.** Ukažte, že pro libovolné lineární zobrazení $f : U \to \mathrm{R}$ existuje nenulový vektor $v_f \in U$ takový, že funkční hodnoty zobrazení $f$ se dají počítat jako skalární součin s vektorem $v_f$:

$$f(u) = v_f \cdot u.$$

Ukažte, že vektor $v_f$ je ortogonální na jádro zobrazení $f$,

**10.8.** Předpokládejme, že vektory $u_1, u_2, u_3 \in U$ tvoří ortogonální systém. Jsou vektorové podprostory $\langle u_1, u_2 \rangle$ a $\langle u_2, u_3 \rangle$ kolmé? Jaké jsou jejich dimenze?

# Kapitola 11

# Skalární součin 2

## 11.1 Ortonormální báze

Následující věta potvrzuje očividnou skutečnost: nenulové ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé.

**Věta 11.1.** *Mějme $k$ nenulových vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ a předpokládejme, že libovolné dva z nich jsou kolmé. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

*Důkaz.* Podle definice lineární nezávislosti máme vyřešit rovnici

$$c^1 u_1 + c^2 u_2 + \cdots + c^k u_k = 0.$$

Vynásobme levou stranu jedním z těchto vektorů, vektorem $u_i$:

$$(c^1 u_1 + c^2 u_2 + \cdots + c^k u_k) \cdot u_i = c^1 (u_1 \cdot u_i) + c^2 (u_2 \cdot u_i) + \cdots + c^k (u_k \cdot u_i).$$

Jelikož vektor $u_i$ je kolmý ke všem ostatním vektorům, je tento výraz roven $c^i (u_i \cdot u_i) = c^i \|u_i\|$. Jelikož na pravé straně máme $0 \cdot u_i = 0$ (skalární součin nulového vektoru a vektoru $u_i$ je roven nule), musí platit

$$c^i \|u_i\| = 0.$$

Délka vektoru $u_i$ je ovšem podle předpokladu nenulová, takže musí být $c^i = 0$. Tuto úvahu můžeme udělat pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, takže dostáváme $c^1 = c^2 = \cdots = c^k = 0$, což znamená lineární nezávislost vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Je-li v $k$-tici $(e_1, \dots, e_k)$ vektorů v $U$ každý vektor nenulový a libovolné dva jsou kolmé, nazývá se tato $k$-tice *ortogonální systém vektorů*. Pokud $k = m$, je podle předchozí věty $\alpha = (e_1, \dots, e_k)$ báze vektorového prostoru $U$. Nazývá se *ortogonální báze*. Pokud je navíc každý vektor z $\alpha$ jednotkový, říkáme, že je tato báze *ortonormální*. V takovém případě pro vektory báze $\alpha$ platí

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{když } i = j \text{ a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro ortonormální bázi je snadné počítat souřadnice vektorů. Pokud totiž pro ortonormální bázi $\alpha = (e_1, \dots, e_m)$ a vektor $v$ platí

$$v = c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^m e_m,$$

pak pro skalární součin s vektorem $e_i$ platí

$$\begin{aligned} v \cdot e_i &= (c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^m e_m) \cdot e_i \\ &= c^1 (e_1 \cdot e_i) + c^2 (e_2 \cdot e_i) + \cdots + c^m (e_m \cdot e_i) \\ &= c^i \end{aligned}$$

(podobný výpočet jsme už dělali v důkazu Věty 11.1), takže $i$-tá souřadnice vektoru $v$ vzhledem k bázi $\alpha$ je $v \cdot e_i$.

*Gram-Schmidtova ortogonalizace* je známá metoda, která z libovolné báze vektorového prostoru se skalárním součinem vytvoří ortogonální bázi. Pokud potřebujeme získat bázi ortonormální, výsledné vektory pak normujeme. (Podrobnosti na cvičení.)

Máme-li vektory vyjádřeny v ortonormální bázi, lze jejich skalární součin snadno vypočítat z jejich souřadnic. Jak, to ukazuje následující věta. Než ji uvedeme, připomeňme, že pro vektory $u, v \in U$ symboly $u_\alpha, v_\alpha$ označujeme jejich souřadnicová vyjádření v bázi $\alpha$. To jsou prvky vektorového prostoru $\mathrm{R}^m$ (je-li $m = \dim U$) a můžeme je tedy vynásobit standardním skalárním součinem.

**Věta 11.2.** *Je-li $\alpha$ ortonormální báze vektorového prostoru $U$, platí pro libovolné dva vektory $v, w \in U$*

$$v \cdot w = v_\alpha \cdot w_\alpha. \tag{11.1}$$

*Důkaz.* Ve výrazu vlevo stačí vektory vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze $\alpha$ a využít toho, že jde o ortonormální bázi. Detaily necháme na čtenáři.

Je třeba mít na paměti, že vztah (11.1) platí, jedině když je báze $\alpha$ ortonormální. Jeho použití v jiných situacích by vedlo k nesprávným výsledkům.

Následující věta se zabývá tvarem matice přechodu mezi ortonormálními bazemi ($M^{\mathrm{T}}$ značí matici transponovanou k matici $M$).

**Věta 11.3.** *Pro libovolné dvě ortonormální báze $\alpha$ a $\beta$ platí*

$$\mathrm{M}_{\alpha,\beta} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}_{\beta,\alpha}.$$

*Důkaz.* $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$ je, jak víme, inverzní matice k matici $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$. Chceme tedy dokázat, že $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{-1} = \mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}$, neboli že $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{E}_m$. Matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ má ve sloupcích souřadnicová vyjádření vektorů báze $\alpha$ v bázi $\beta$. Označíme-li $\alpha = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, je tedy její $i$-tý sloupec roven vektoru $(e_i)_\beta$. Stejnému vektoru, psanému do řádku, je roven i řádek matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}$. Hodnota na pozici $(i,j)$ v matici $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ je tedy rovna standardnímu skalárnímu součinu $(e_i)_\beta \cdot (e_j)_\beta$. Podle Věty 11.2 a díky ortonormálnosti báze $\beta$ ovšem $(e_i)_\beta \cdot (e_j)_\beta = e_i \cdot e_j$. Báze $\alpha$ je ovšem rovněž ortonormální, takže tato hodnota je rovna 1 když $i = j$ a jinak je rovna 0. Jinými slovy, matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ je jednotková.

Věta 11.3 má praktický význam, protože usnadňuje výpočet matice přechodu mezi vektorovými bazemi, pokud jsou tyto báze ortonormální. Místo složitého výpočtu inverzní matice stačí matici transponovat. Ortonormální vektorové báze se v počítačové grafice často používají.

Věta 11.3 rovněž říká, že sloupce matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ tvoří (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) ortonormální bázi prostoru $\mathrm{R}^m$. Takovým maticím se říká *ortogonální matice* (kupodivu; správný termín by byl spíš ortonormální matice). Ortogonální matice jsou právě čtvercové matice $M$, které splňují $M^{-1} = M^{\mathrm{T}}$. Z tohoto vztahu snadno odvodíme, že $|\det M| = 1$.

**Příklad 11.1.** Předpokládejme, že $\dim U = 3$, báze $\alpha$ a $\beta$ prostoru $U$ jsou ortonormální a jejich matice přechodu je

$$\mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Můžete se přesvědčit, že matice je vskutku ortogonální, tedy že její sloupce tvoří ortonormální bázi v $\mathrm{R}^3$. Transponovaná matice je rovněž ortogonální (je to matice $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$), takže i řádky matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ jsou ortonormální báze $\mathrm{R}^3$. Platí $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{I}_3$. Ve sloupcích matice jsou souřadnicová vyjádření vektorů báze $\alpha$ v bázi $\beta$ a v řádcích souřadnicová vyjádření vektorů báze $\beta$ v bázi $\alpha$.

## 11.2 Objem

Mějme $m$-tici $K = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ vektorů v orientovaném vektorovém prostoru $U$ dimenze $m$ se skalárním součinem. *Orientovaným rovnoběžnostěnem určeným $m$-ticí $K$* rozumíme množinu $[K]$ lineárních kombinací vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_m$, pro jejíž každý koeficient $c$ platí $0 \leq c \leq 1$, spolu s číslem 1, je-li $K$ kladně orientovaná báze $U$, $-1$, je-li $K$ záporně orientovaná báze $U$ a 0, je-li lineárně závislá.

*Orientovaným objemem* orientovaného rovnoběžnostěnu $[K]$ rozumíme číslo $\mathrm{Vol}[K]$ splňující následující podmínky:

1. Tvoří-li vektory množiny $K$ ortonormální bázi, pak $\mathrm{Vol}[K]=1$ nebo $\mathrm{Vol}[K]=-1$ podle toho, zda je kladně, či záporně orientovaná.

2. Jestliže $\bar{K}$ vznikne z $K$ vynásobením jednoho jejího vektoru kladným číslem $c$, pak $\mathrm{Vol}[\bar{K}]=c\cdot\mathrm{Vol}[K]$.

3. Jestliže $\bar{K}$ vznikne z $K$ nahrazením jednoho jejího vektoru jeho součtem s násobkem jiného vektoru, pak $\mathrm{Vol}[\bar{K}]=\cdot\mathrm{Vol}[K]$.

Všimněte si, že všechny podmínky jsou splněny pro přirozený pojem objemu z prostorů dimenze do 3.

Zvolme nějakou ortonormální bázi $\alpha$ prostoru $U$ a označme $M^K_\alpha$ čtvercovou matici, jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicovými vyjádřeními vektorů množiny $K$.

Následující tvrzení ukazuje, že orientovaný objem rovnoběžnostěnu lze vypočítat pomocí determinantu.

**Věta 11.4.** $\mathrm{Vol}\,K=\det M^K_\alpha$.

*Náznak důkazu.* Pokud je matice $M^K_\alpha$ regulární, budeme s ní dělat sloupcové (nebo řádkové s transponovanou, je to jedno) úpravy, až dostaneme diagonální matici. Úpravy odpovídají postupnému převodu vektorů množiny $K$ na vektory báze $\alpha$. Determinant matice se bude měnit stejně, jako objem rovnoběžnostěnu.

U singulární matice je tvrzení jasné.

## 11.3 Vektorový součin

Předpokládejme, že vektorový prostor je orientovaný a má dimenzi alespoň 2 (tedy $m\geq 2$) a zvolme v něm kladně orientovanou ortonormální bázi $\alpha$. Pro libovolných $m-1$ vektorů $u_1,u_2,\dots,u_{m-1}\in U$ definujme zobrazení $\mathrm{P}_{u_1,\dots,u_{m-1}}:U\to\mathrm{R}$ předpisem

$$P_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u)=\mathrm{Vol}\left[u_1,\dots,u_{m-1},u\right]=\det\begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_{m-1}^1 & u^1\\ u_1^2 & \cdots & u_{m-1}^2 & u^2\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ u_1^m & \cdots & u_{m-1}^m & u^m\end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

kde horními indexy značíme souřadnice vektorů v bázi $\alpha$ jako obvykle.

Determinant ve vztahu (11.2) lze vypočítat rozvojem podle posledního sloupce. Dostaneme

$$P_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u)=v^1u^1+v^2u^2+\cdots+v^mu^m,$$

kde čísla $v^1,v^2,\dots,v^m$ jsou vypočítána ze souřadnic vektorů $u_1,\dots,u_{m-1}$. Hodnota $P_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u)$ je tedy vypočítána jako skalární součin vektoru $u$ s vektorem $v$, jehož souřadnice v bázi $\alpha$

jsou $v^1, v^2, \ldots, v^m$. S pomocí tvrzení z úlohy 10.7 lze snadno ověřit, že vektor $v$ nezávisí na tom, v jaké bázi jsme jeho souřadnice počítali. Je to tedy určitý významný vektor, který je dán vektory $u_1, \ldots, u_{m-1}$. Říká se mu *vektorový součin vektorů* $u_1, \ldots, u_{m-1}$ a značí se $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$ pro $m \geq 3$ a $u_1^\times$ pro $m = 2$.

Vektorový součin obvykle není definován takto obecně, ale jen pro $m = 3$. Zde jsme uvedli definici obecnější v naději, že díky tomu čtenáři snadněji pochopí principy, které jsou za vektorovým součinem skryty.

Je třeba mít na paměti, že vzorec (11.2) předpokládá, že vektory jsou vyjádřeny vzhledem k ortonormální bázi. Pokud tento předpoklad porušíme, nevyjde nám vektorový součin správně.

**Příklad 11.2.** Je-li dimenze vektorového prostoru $U$ rovna 3 (což je, jak jsme si už řekli, obvyklý případ, ve kterém vektorový součin počítáme), je vektorový součin definován pro dvojice vektorů. Pro vektory $u_1, u_2 \in U$ a libovolný vektor $u \in U$ pak platí (počítáno v souřadnicích vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\alpha$)

$$
\begin{aligned}
(u_1 \times u_2) \cdot u &= \det \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u^3 \end{pmatrix} \\
&= (u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2) u^1 + (u_1^3 u_2^1 - u_1^1 u_2^3) u^2 + (u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1) u^3,
\end{aligned}
$$

takže

$$
(u_1 \times u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2 \\ u_1^3 u_2^1 - u_1^1 u_2^3 \\ u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1 \end{pmatrix}. \tag{11.3}
$$

**Příklad 11.3.** Vektorový součin ovšem často počítáme i v dimenzi 2, ačkoli o tom nevíme. Pro vektory $u$ a $v$ v dvojrozměrném vektorovém prostoru $U$ totiž platí (opět vyjádřeno v souřadnicích vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\alpha$):

$$
u^\times \cdot v = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = -u^2 v^1 + u^1 v^2,
$$

takže

$$
(u^\times)_\alpha = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix},
$$

$u^\times$ je tedy vektor, který jsme zvyklí používat jako vektor kolmý k vektoru $u$.

Následující věta uvádí základní vlastnosti vektorového součinu. Další se dozvíme v příští kapitole.

**Věta 11.5.** *Vektorový součin* $v = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$ *je kolmý na každý z vektorů* $u_1, \ldots, u_{m-1}$. *Jeho délka je rovna orientovanému objemu rovnoběžnostěnu* $[u_1, \ldots, u_{m-1}, v/\|v\|]$ *Je nenulový, právě když jsou vektory* $u_1, \ldots, u_{m-1}$ *lineárně nezávislé. V takové případě je báze* $\beta = (u_1, \ldots, u_{m-1}, v)$ *kladně orientovaná.*

*Důkaz.* Pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ je $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u_i) = 0$, protože je to determinant matice se dvěma shodnými sloupci. Ale $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u_i) = v \cdot u_i$, takže vektory $v$ a $u_i$ jsou kolmé.

Tvrzení o objemu plyne přímo z definice.

Jsou-li vektory $u_1, \ldots, u_{m-1}$ lineárně závislé, je $v = 0$, protože je to determinant matice s lineárně závislými sloupci.

Předpokládejme naopak, že $v = 0$. Jelikož počet vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$ je menší než dimenze vektorového prostoru $U$, existuje vždy vektor $u$, který není jejich lineární kombinací. Jelikož $v = 0$, platí $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = v \cdot u = 0$. Číslo $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$ je ovšem determinant matice, jejíž poslední sloupec není lineární kombinací ostatních sloupců. Jelikož je nulový, musí být tyto sloupce lineárně závislé, což znamená lineární závislost vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$.

Na závěr ukážeme, že báze $\beta$ je kladně orientovaná. Zvolme ortonormální kladně orientovanou bázi $\alpha$. Matice, jejímž determinantem je číslo $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(v)$, obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů báze $\beta$ v bázi $\alpha$. Je to tedy matice přechodu od báze $\beta$ k bázi $\alpha$ a platí $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(v) = \det \mathrm{M}_{\alpha,\beta}$. Tento determinant je ovšem roven $v \cdot v = \|v\|^2$, takže je kladný.

Tím je věta dokázána.

**Příklad 11.4.** Mějme v trojrozměrném vektorovém prostoru $U$ vektory $u_1$ a $u_2$, jejichž vyjádření vzhledem k ortonormální bázi $\alpha$ je

$$(u_1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorový součin těchto vektorů (lépe řečeno jeho souřadnice v bázi $\alpha$) můžeme vypočítat přímo pomocí vztahu (11.3). Pohodlnější je ale postupovat podle definice:

$$(u_1 \times u_2) \cdot v = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & v^1 \\ 0 & 1 & v^2 \\ 0 & 1 & v^3 \end{pmatrix} = -v^2 + v^3,$$

takže

$$(u_1 \times u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme snadno ověřit, že vektorový součin $u_1 \times u_2$ splňje všechno, co o něm říká Věta 11.5.

## 11.4 Izometrie

V této části předpokládáme, že máme dva vektorové prostory se skalárním součinem $U$ a $V$ a že $\dim U = \dim V = m$.

Lineární zobrazení $f: U \to V$ se nazývá *izometrie*, jestliže pro libovolné dva vektory $u_1, u_2 \in U$ platí

$$f(u_1) \cdot f(u_2) = u_1 \cdot u_2. \tag{11.4}$$

Stručně řečeno, izometrie je lineární zobrazení, které zachovává skalární součin. Následující věta ukazuje, že v důsledku toho zachovává i všechny struktury, které jsou pomocí skalárního součinu definovány:

**Věta 11.6.** *Je-li $f: U \to V$ izometrie, pak pro libovolné vektory $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m \in U$ platí*

1. $\left\| f(u) \right\| = \|u\|$.
2. $\vartheta_{f(u_1), f(u_2)} = \vartheta_{u_1, u_2}$.
3. *Je-li $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ortonormální báze prostoru $U$, pak $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m))$ je ortonormální báze prostoru $V$.*
4. *Jsou-li prostory $U$ a $V$ i zobrazení $f$ orientované, pak*

$$f(u_1) \times \cdots \times f(u_{m-1}) = f(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}).$$

*Důkaz.* Tvrzení 1, 2 a 3 plynou přímo z definic, konkrétně ze vztahů (10.4) a (10.9). Tvrzení 4 dokážeme později.

Důsledkem tvrzení 3 je, že zobrazení $f$ je izomorfismus vektorových prostorů.

Následující tvrzení ukazuje, že matice izometrie vzhledem k ortonormálním bazím je ortogonální:

**Věta 11.7.** *Mějme ortonormální bázi $\alpha$ vektorového prostoru $U$ a ortonormální bázi $\beta$ vektorového prostoru $V$. Pak lineární zobrazení $f: U \to V$ je izometrie, právě když matice $\mathbf{M}^f_{\beta,\alpha}$ je ortogonální.*

*Důkaz.* Označme vektory báze $\alpha$ jako $e_1, \ldots, e_m$. Jelikož $f$ je izometrie, tvoří vektory $f(e_1), \ldots, f(e_m)$ ortonormální bázi prostoru $V$: ortogonální jsou přímo podle definice izometrie, jednotkové jsou podle tvrzení 1 Věty 11.6. Sloupce matice $\mathbf{M}^f_{\beta,\alpha}$ jsou souřadnicová vyjádření obrazů vektorů báze $\alpha$ v bázi $\beta$; $i$-tý sloupec matice je tedy $f(e_i)_\beta$. Jelikož báze $\beta$ je ortonormální, je matice ortogonální podle (11.1).

Věta 11.7 nám umožní dokončit důkaz věty předchozí.

*Důkaz tvrzení 4 Věty 11.6.* Podle definice vektorového součinu pro libovolný vektor $u \in U$ je $(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot u = \mathrm{P}_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u) = \det N$, kde matice $N$ má ve sloupcích souřadnicová vyjádření vektorů $u_1, \dots, u_{m-1}$ a $u$ v kladně orientované ortonormální bázi $\alpha$. Obrazy $f(u_1), \dots, f(u_{m-1})$ a $f(u)$ těchto vektorů mají v kladně orientované ortonormální bázi $\beta$ vektorového prostoru $V$ souřadnicová vyjádření ve sloupcích matice $\mathrm{M}^f_{\beta,\alpha} \cdot N$, takže

$$\mathrm{P}_{f(u_1),\dots,f(u_{m-1})}(f(u)) = \det(\mathrm{M}^f_{\beta,\alpha} \cdot N) = \det \mathrm{M}^f_{\beta,\alpha} \cdot \det N.$$

Matice $\mathrm{M}^f_{\beta,\alpha}$ je ovšem podle Věty 11.7 ortogonální, takže její determinant je roven 1 nebo $-1$. Jelikož zobrazení $f$ je orientované, je roven 1. Celkově tedy dostáváme $\mathrm{P}_{f(u_1),\dots,f(u_{m-1})}(f(u)) = \det N = \mathrm{P}_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u)$.

Pro libovolný vektor $u \in U$ tedy platí

$$(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot u = (f(u_1) \times \cdots \times f(u_{m-1})) \cdot f(u).$$

Vzhledem k tomu, že zobrazení $f$ je izometrie, můžeme ještě levou stranu změnit:

$$f(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot f(u) = (f(u_1) \times \cdots \times f(u_{m-1})) \cdot f(u).$$

Jelikož zobrazení $f$ je bijekce (což je důsledek tvrzení 3 Věty 11.6), každý vektor $v \in V$ je obrazem nějakého vektoru z prostoru $U$. Proto pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$f(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot v = (f(u_1) \times \cdots \times f(u_{m-1})) \cdot v,$$

což už znamená rovnost, kterou jsme chtěli dokázat (srovnejte s úlohou 10.7).

# Kapitola 12

# Afinní prostory

Tato a následující kapitola nepatří do lineární algebry, ale do příbuzné oblasti afinní geometrie, která na lineární algebře staví.

## 12.1 Afinní prostory

Řekneme, že na neprázdné množině $A$ je dána *struktura afinního prostoru* (stručněji *afinní struktura*), je-li dán vektorový prostor $U$ a zobrazení $+_A : A \times U \to A$ takové, že

1. pro všechna $a \in A$, $u, v \in U$
$$(a +_A u) +_A v = a +_A (u + v), \tag{12.1}$$
2. pro všechna $a, b \in A$ existuje právě jedno $u \in U$ tak, že
$$a +_A u = b. \tag{12.2}$$

Množina $A$ se strukturou afinního prostoru se nazývá *afinní prostor*, její prvky se nazývají *body*. Vektorový prostor $U$ se nazývá *zaměření afinního prostoru* $A$.

Zobrazení $+$ se nazývá *sčítání bodů a vektorů*. Pro libovolné $a \in A$ a $u \in U$ se bod $a +_A u$ nazývá *součet bodu* $a$ *a vektoru* $u$. Dolní index $A$ většinou vynecháváme a místo $a +_A u$ píšeme prostě $a + u$.

Jelikož podle podmínky 1 definice platí $(a + u) + v = a + (u + v)$, můžeme při přičítání dvou vektorů k bodu vynechat závorky a psát pouze $a + u + v$.

Vektor $u$ z podmínky 2 se označuje $b - a$. Podmínka říká, že tento vektor existuje pro libovolné $a$ a $b$, a to právě jeden. Přiřazením $(a, b) \mapsto b - a$ je tedy jednoznačně určené zobrazení z $A \times A$ do $U$. Vektoru $b - a$ se říká *rozdíl bodů* $b$ *a* $a$. Přímo z definice tedy pro každé dva body $a$ a $b$ plyne

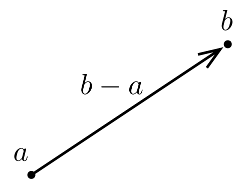
$$a + (b - a) = b \tag{12.3}$$

(jako $b-a$ jsme si totiž označili vektor $u$ z podmínky 2, tedy vektor, pro který platí $a+u=b$).

Body afinního prostoru obvykle kreslíme jako tečky a vektory jako šipky do nich umístěné. (Jsou to ovšem prvky jiné množniny, než množiny bodů.) Při tomto zobrazení dvě různé šipky určují týž vektor, pokud jejich začátky a konce dohromady na obrázku tvoří vrcholy rovnoběžníka.

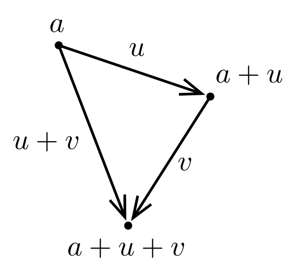
Body afinního prostoru obvykle kreslíme jako tečky a vektory jako šipky do nich umístěné. (Jsou to ovšem prvky jiné množniny, než množiny bodů.) Konec šipky ukazuje na bod vzniklý součtem původního bodu a zakresleného vektoru. Při tomto zobrazení stejně dlouhé a týmž směrem mířící šipky umístěné do různých bodů zobrazují týž vektor (délku vektoru ovšem obecně měřit neumíme).

První podmínka definice je takto zakreslena na obrázku 12.1.




Obrázek 12.1: Body $a$, $b$ a vektor $b-a$.

Na obrázku 12.2 je zakreslena druhá podmínka. Podle ní se má bod $(a+u)+v$ rovnat bodu $a+(u+v)$, což je v souladu s geometrickým způsobem, kterým znázorňujeme součet dvou vektorů (rovnoběžníková metoda).




Obrázek 12.2: Grafické znázornění podmínky 1. definice afinní struktury.

Je-li $U$ vektorový prostor konečné dimenze, říká se o afinním prostoru $A$, že je také konečné dimenze. V takovém případě *dimenzí afinního prostoru* $A$ nazýváme dimenzi vektorového prostoru $U$. Nemá-li vektorový prostor $U$ konečnou dimenzi, říkáme i o afinním prostoru $A$, že nemá konečnou dimenzi (má nekonečnou dimenzi, je nekonečně rozměrný). Afinní prostor dimenze 1 se nazývá *afinní přímka*, afinní prostor dimenze 2 *afinní rovina*.

Pro počítačovou grafiku jsou samozřejmě důležité hlavně afinní prostory dimenze nejvýše 3.

Na vektorovém prostoru $U$ zavádíme *kanonickou strukturu afinního prostoru* takto: zaměřením prostoru $U$ volíme samotný vektorový prostor $U$, pro libovolný bod $a \in U$ a vektor $v \in U$ (zde je dělení na body a vektory čistě formální) definujeme jejich součet jako součet vektorů ve vektorovém prostoru $U$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme vektorové prostory uvažovat vždy s kanonickou strukturou afinního prostoru, popsanou v předchozím příkladě.

**Příklad 12.1.** Víme, že na $n$-té kartézské mocnině množiny reálných čísel $\mathrm{R}^n$ je dána kanonická struktura vektorového prostoru. Tu lze použít k zavedení afinní struktury na $\mathrm{R}^n$.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme množinu $\mathrm{R}^n$ uvažovat vždy s kanonickou strukturou afinního prostoru.

Abychom odlišili, kdy prvek $\mathrm{R}^n$ chápeme jako bod z afinního prostoru $\mathrm{R}^n$ a kdy jako vektor z vektorového prostoru $\mathrm{R}^n$, budeme v prvním případě používat hranaté a ve druhém kulaté závorky.

## 12.2 Základní vlastnosti afinní struktury

V této části dokážeme některé vlastnosti součtu bodu a vektoru a rozdílu bodů.

**Věta 12.1.** *Pro libovolný afinní prostor $A$ se zaměřením $U$ a prvky $a,b \in A$, $u \in U$ platí*

1. $a + 0 = a$,
2. $a - b = -(b - a)$,
3. $(a + u) - b = (a - b) + u$,

„0“ v bodu 1. je nulový vektor ve vektorovém prostoru $U$.

*Důkaz.* 1. Podle podmínky 2 definice afinního prostoru existuje právě jeden vektor $u \in U$ takový, že $a + u = a$. Odtud plyne rovnost $a + u = (a + u) + u$, která podle podmínky 1 znamená $a + u = a + (u + u)$, což podle podmínky 2 (jednoznačnost) vede k $u = u + u$. Tuto rovnost ale splňuje pouze nulový vektor (proč?). Z rovnosti $a + u = a$ tedy vyplynulo $u = 0$, což znamená, že žádný jiný vektor kromě nulového tuto rovnost nesplňuje. To společně s podmínkou 2 (existence) dokazuje první bod věty.

2. Označme $a - b = u$, $b - a = v$. Dostáváme $b = a + v = (b + u) + v = b + (u + v)$. Podle prvního bodu této věty, který jsme již dokázali, platí $u + v = 0$, neboli $u = -v$.

3. Vektor $v = (a + u) - b$ splňuje podmínku $b + v = a + u$. Přičtením vektoru $-v$ k oběma stranám této rovnice a úpravou dostaneme $a = b + (v - u)$. Odtud plyne $v - u = a - b$. Nyní, přičtením vektoru $u$ dostaneme $v = (a - b) + u$, což je dokazované tvrzení.

Další základní vlastnosti bez důkazů:

**Věta 12.2.** *Pro libovolné tři body* $a_1, a_2, a_3$ *afinního prostoru* $A$ *platí*

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = a_3 - a_1.$$

**Věta 12.3.** *Pro libovolné dva body* $a, b$ *afinního prostoru* $A$ *a vektory* $u, v$ *jeho zaměření platí*

$$(a+u) - (b+v) = (a-b) + (u-v).$$

## 12.3 Afinní kombinace a afinní obal

Tvrzení následující věty jsem na přednášce motivoval ukázkovým příkladem.

**Věta 12.4.** *Mějme body* $a_0, a_1, \dots, a_m$ *afinního prostoru* $A$*. Pro libovolné dva body* $b, b' \in A$ *a čísla* $r^0, r^1, \dots, r^m$ *taková, že* $r^0 + r^1 + \cdots + r^m = 1$*, platí*

$$\begin{aligned} &b + r^0(a_0 - b) + r^1(a_1 - b) + \cdots + r^m(a_m - b) \\ &\quad = b' + r^0(a_0 - b') + r^1(a_1 - b') + \cdots + r^m(a_m - b'). \end{aligned} \tag{12.4}$$

*Důkaz.* Zkusíme vypočítat rozdíl levé a pravé strany. Měl by nám vyjít nulový vektor. Podle Věty 12.3 je tento rozdíl roven

$$\begin{aligned} &(b - b') + r^0(a_0 - b + b' - a_0) + r^1(a_1 - b + b' - a_1) + \cdots \\ &\qquad \cdots + r^m(a_m - b + b' - a_m) \\ &\quad = (b - b') + r^0(b' - b) + r^1(b' - b) + \cdots + r^m(b' - b) \\ &\quad = (b - b') + (r^0 + r^1 + \cdots + r^m)(b' - b) \\ &\quad = (b - b') + (b' - b) \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Z uvedené věty vyplývá, že hodnota výrazu $b + r^0(a_0 - b) + r^1(a_1 - b) + \cdots + r^m(a_m - b)$ nezávisí na volbě bodu $b$. Závisí tedy pouze na bodech $a_0, a_1, \dots, a_m$ a číslech $r^0, r^1, \dots, r^m$ (jejichž součet je roven 1). Tento výraz nazýváme *afinní kombinací bodů* $a_0, a_1, \dots, a_m$ *s koeficienty* $r^0, r^1, \dots, r^m$ a značíme

$$r^0 a_0 + r^1 a_1 + \cdots + r^m a_m. \tag{12.5}$$

Tento výraz je třeba vnímat jako celek a nechápat jeho části jako výsledek aplikace nějakých operací. Body nelze násobit čísly, ani je nelze sčítat. Je třeba mít také na paměti, že v tomto výrazu musí být součet koeficientů $r^0, r^1, \dots, r^m$ roven jedné.

*Afinním obalem* neprázdné množiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech afinních kombinací prvků množiny $K$. Afinní obal množiny $K$ označujeme symbolem $\mathrm{Aff}(K)$. Platí

$$\mathrm{Aff}(K) = \left\{ r^0 a_0 + \cdots + r^k a_k \mid k \geq 1,\ a_0, \ldots, a_k \in K,\ r^0 + \cdots + r^k = 1 \right\}. \tag{12.6}$$

**Věta 12.5.** *Pro libovolnou neprázdnou množinu $K \subseteq A$ platí $\mathrm{Aff}(\mathrm{Aff}(K)) = \mathrm{Aff}(K)$.*

*Důkaz.* Mějme bod $a \in \mathrm{Aff}(\mathrm{Aff}(K))$. Tento bod je afinní kombinací afinních kombinací bodů z $K$. Pro jednoduchost předpokládejme, že ve všech afinních kombinacích vystupují pouze dva body (obecný případ se dokazuje stejně, je to jen více psaní). Je tedy

$$a = s^0(r^0 a_0 + r^1 a_1) + s^1(r^2 a_2 + r^3 a_3).$$

Následující je základní vlastnost afinních kombinací:

$$s^0(r^0 a_0 + r^1 a_1) + s^1(r^2 a_2 + r^3 a_3) = s^0 r^0 a_0 + s^0 r^1 a_1 + s^1 r^2 a_2 + s^1 r^3 a_3.$$

To ovšem znamená, že $a \in \mathrm{Aff}(K)$.

## 12.4 Afinní podprostory

Neprázdná podmnožina $B$ afinního prostoru $A$ se zaměřením $U$ se nazývá *afinní podprostor afinního prostoru $A$*, jestliže $\mathrm{Aff}(B) = B$.

K důkazu vlastnosti $\mathrm{Aff}(B) = B$ stačí dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z $B$ je prvkem $B$.

**Věta 12.6.** *Neprázdná podmnožina $B$ afinního prostoru $A$ se zaměřením $U$ je jeho afinním podprostorem, právě když existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ takový, že jsou splněny následující podmínky:*

1. *Pro každé $a \in B$, $u \in V$ platí $a + u \in B$.*

2. *Pro každé $a, b \in B$ platí $b - a \in V$.*

*Důkaz.* Zleva doprava: Položme $V = \{c - b \mid b, c \in B\}$ a ověřme podmínky 1 a 2. Podmínka 1: $u$ je tvaru $c - b$ pro $b, c \in B$, takže $a + u = a + (c - b)$. To je ale podle příkladu **??** rovno afinní kombinaci $a + c - b$, takže podle definice afinního podprostoru jde o prvek $B$. Podmínka 2 je splněna triviálně.

Zprava doleva: Tady předpokládáme, že existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ tak, že jsou splněny podmínky 1 a 2, a dokazujeme $\mathrm{Aff}(B) = B$.

K důkazu vlastnosti $\mathrm{Aff}(B) = B$ stačí dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z $B$ je prvkem $B$. Mějme tedy nějakou afinní kombinaci dvou bodů $b_0, b_1 \in B$:

$$b = r^0 b_0 + r^1 b_1, \quad r^0 + r^1 = 1.$$

Podle definice afinní kombinace máme

$$b = b_0 + r^0(b_0 - b_0) + r^1(b_1 - b_0) = b_0 + r^1(b_1 - b_0).$$

Podle podmínky 2 je vektor $b_1 - b_0$ prvkem $V$. Je tedy prvkem $V$ i jeho násobek $r^1(b_1 - b_0)$. Podmínka 1 nám tedy zaručí $b \in B$.

Vektorový prostor $V$ z Věty 12.6 se nazývá *Zaměření afinního podprostoru* $B$.

**Příklad 12.2.** Každý vektorový podprostor daného vektorového prostoru je jeho afinním podprostorem. Naopak to neplatí.

**Věta 12.7.** *Je-li $A$ afinní prostor se zaměřením $U$ a $B \subseteq A$ jeho afinní podprostor se zaměřením $V \subseteq U$, pak množina $B$ spolu s vektorovým prostorem $V$ a zobrazením $+_B : B \times V \to B$ vzniklým zúžením zobrazení $+_A$ je afinní prostor.*

*Důkaz.* Přenecháme čtenáři. Je třeba ověřit podmínky definice afinního prostoru nebo postupovat podle Věty 12.6.

Afinní podprostory vždy uvažujeme se strukturou afinního prostoru uvedenou v předchozí větě. Můžeme tedy hovořit o dimenzi afinního podprostoru (také například o afinní nebo bodové bázi afinního podprostoru, které jsou definovány dále). Je-li dimenze afinního prostoru $A$ rovna $m$ a dimenze afinního podprostoru $B \subseteq A$ rovna $m-1$, pak afinní podprostor $B$ nazýváme *nadrovinou v afinním prostoru* $A$.

Pro množinu $B = \{a \in A \mid a = a_0 + u, u \in V\}$, kde $V \subseteq U$ je vektorový podprostor, zavádíme symbolické označení

$$B = a_0 + V. \tag{12.7}$$

Následující věta ukazuje, že každý podprostor afinního prostoru lze charakterizovat pomocí jednoho bodu a vektorového podprostoru zaměření.

**Věta 12.8.** *Mějme afinní prostor $A$ se zaměřením $U$.*

*1. Je-li $a_0 \in A$ bod a $V \subseteq U$ vektorový podprostor, pak množina $B = a_0 + V$ je podprostor afinního prostoru $A$, jehož zaměření je $V$.*

*2. Je-li $B$ podprostor afinního prostoru $A$ se zaměřením $V \subseteq U$, $a_0 \in B$ bod, pak $B = a_0 + V$.*

*Důkaz.* Plyne z Věty 12.6.

Je-li $(u_1, \ldots, u_m)$ báze vektorového podprostoru $V \subseteq U$, platí pro libovolný bod $a_0 \in A$,

$$a_0 + V = \left\{ a \in A \;\middle|\; a = a_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i u_i,\ t_1, \ldots, t_m \in R \right\}. \tag{12.8}$$

Rovnice

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i u_i \tag{12.9}$$

se nazývá *parametrická rovnice afinního podprostoru* $a_0 + V$.

**Příklad 12.3.** Parametrická rovnice přímky je tedy

$$a = a_0 + tu, \tag{12.10}$$

kde $a_0$ je libovolný bod přímky a $u$ libovolný nenulový vektor jejího zaměření.

**Příklad 12.4.** Parametrickou rovnici přímky lze pomocí dvou jejích různých bodů $a_1$, $a_2$ napsat takto:

$$a = a_1 + t(a_2 - a_1). \tag{12.11}$$

## 12.5 Afinní báze a souřadnice

Mějme afinní prostor $A$ dimenze $m$ se zaměřením $U$. Pro bod $a_0 \in A$ a bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorového prostoru $U$ nazýváme dvojici $\varphi = (\alpha, a_0)$ *afinní bazí* afinního prostoru $A$. Bod $a_0$ nazýváme *počátkem* báze $\varphi$. Afinní bázi $\varphi$ zapisujeme také jako $(m+1)$-tici $(u_1, \dots, u_m, a_0)$.

Pro libovolný bod $a \in A$ nazýváme *afinními souřadnicemi (souřadnicovým vyjádřením) bodu $a$ vzhledem k afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$* $(m+1)$-tici

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0)^1_\alpha \\ (a-a_0)^2_\alpha \\ \vdots \\ (a-a_0)^m_\alpha \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12.12}$$

Čísla $(a-a_0)^1_\alpha, (a-a_0)^2_\alpha, \dots, (a-a_0)^m_\alpha$ značíme (pořadě) $a^1_\varphi, a^2_\varphi, \dots, a^m_\varphi$, případně jen $a^1, a^2, \dots, a^m$, pokud je afinní báze $\varphi$ zřejmá z kontextu.

Souřadnicové vyjádření bodu $a$ vzhledem k afinní bázi $\varphi$ tedy vznikne tak, že se najdou souřadnice vektoru $a - a_0$ vzhledem k bázi $\alpha$ vektorového prostoru $U$ a doplní se číslem 1 (důvody této formality vysvitnou postupně). Kvůli odlišení od souřadnic vektorů budeme afinní souřadnice bodů zapisovat v hranatých závorkách.

V příkladech je někdy nešikovné psát neustále jedničku jako poslední složku souřadnic bodů. Pokud ji vynecháme, hovoříme o *zkrácených afinních souřadnicích*.

Je-li $a_0 = [0, \dots, 0] \in R^m$ a $\alpha$ kanonická báze vektorového prostoru $R^m$, nazývá se afinní báze $(\alpha, a_0)$ afinního prostoru $R^m$ *kanonickou afinní bazí* prostoru $R^m$.

Součet bodu a vektoru lze v afinních souřadnicích vyjádřit pomocí sčítání souřadnic, pokud k souřadnicím vektoru přidáme na konec nulu. Když pro vektor $u \in U$ a afinní souřadnicový systém $\varphi = (\alpha, a_0)$ afinního prostoru $A$ se zaměřením $U$ zavedeme označení

$$u_\varphi = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12.13}$$

máme pro libovolný bod $a \in A$

$$(a+u)_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0+u)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-a_0)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = a_\varphi + u_\varphi. \tag{12.14}$$

Parametrickou rovnici afinního podprostoru (12.9) můžeme přepsat pomocí souřadnicového vyjádření bodů a vektorů v afinní bázi $\varphi$ takto:

$$a_\varphi = (a_0)_\varphi + \sum_{i=1}^{m} t_i (u_i)_\varphi \tag{12.15}$$

s tím, že poslední řádek této rovnice je triviální a je možné ho vynechat (tedy použít zkrácené afinní souřadnice).

## 12.6 Matice přechodu mezi afinními bazemi

Mějme dvě afinní báze $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\psi = (\beta, b_0)$ afinního prostoru $A$ dimenze $m$ se zaměřením $U$. Podívejme se na následující problém: jak najít souřadnicové vyjádření bodu $a \in A$ vzhledem k bázi $\psi$, známe-li souřadnicové vyjádření tohoto bodu vzhledem k bázi $\varphi$? Při řešení tohoto problému můžeme předpokládat, že známe vzájemné vztahy obou bazí, tj. že známe souřadnice počátku $a_0$ vzhledem k bázi $\psi$ a souřadnice vektorů vektorové báze $\alpha$ vzhledem k vektorové bázi $\beta$ a naopak.

Zvolme tedy libovolný bod $a \in A$ a pokusme se vypočítat jeho souřadnice vzhledem k bázi $\psi$ pomocí souřadnic vzhledem k bázi $\varphi$:

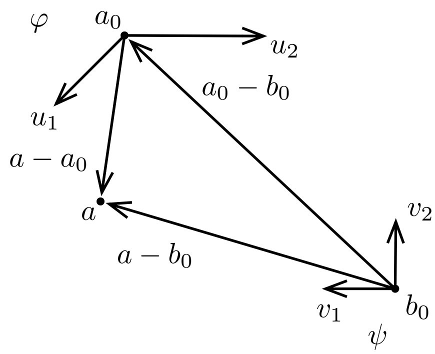
$$\begin{aligned} (a-b_0)_\beta &= (a-a_0+a_0-b_0)_\beta = (a-a_0)_\beta + (a_0-b_0)_\beta \\ &= M_{\beta,\alpha} \cdot (a-a_0)_\alpha + (a_0-b_0)_\beta. \end{aligned} \tag{12.16}$$

(Viz obr. 12.3)

Vidíme, že se nám podařilo vypočítat souřadnice bodu $a$ vzhledem k afinní bázi $\psi$ pomocí následujících dat: souřadnic bodu $a$ vzhledem k afinní bázi $\varphi$, matice přechodu od (vektorové) báze $\alpha$ k bázi $\beta$ a souřadnic počátku $a_0$ vzhledem k afinní bázi $\psi$.

Hodnoty $M_{\beta,\alpha}$ a $(a_0-b_0)_\beta$ přitom nezávisejí na volbě bodu $a$. Pokud tedy potřebujeme přepočítat souřadnice u více bodů, stačí tyto hodnoty vypočíst pouze jednou.

Nyní ještě provedeme menší trik. Uvědomme si, že $(m+1)$-tice $a_\psi$ obsahuje ve svých prvních $m$ složkách hodnoty $m$-tice $(a-b_0)_\psi$. Levá strana (12.16) je tedy souřadnicové vyjádření bodu $a$ v afinní bázi $\psi$ kromě posledního řádku (obsahujícího jedničku). Poslední výraz v (12.16), pokud se doplní o tento řádek (obsahující jedničku), lze zase vyjádřit jako součin jisté matice a souřadnicového vyjádření $a_\varphi$.




Obrázek 12.3: Obrázek k matici přechodu od báze $\varphi$ k bázi $\psi$.

Konkrétně, pokud definujeme po blocích matici $M_{\psi,\varphi}$ takto:

$$M_{\psi,\varphi} = \left( \begin{array}{ccc|c} & M_{\beta,\alpha} & & (a_0)_\psi \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right) \tag{12.17}$$

bude tato matice splňovat

$$a_\psi = M_{\psi,\varphi} \cdot a_\varphi. \tag{12.18}$$

Matice $M_{\psi,\varphi}$ se nazývá *matice přechodu od afinní báze* $\varphi$ *k afinní bázi* $\psi$.

**Příklad 12.5.** Pro libovolné tři afinní báze $\varphi, \bar{\varphi}, \varphi'$ afinního prostoru $A$ platí

$$M_{\varphi',\bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi},\varphi} = M_{\varphi',\varphi}. \tag{12.19}$$

**Příklad 12.6.** Pro libovolné dvě afinní báze $\varphi, \bar{\varphi}$ afinního prostoru $A$ dimenze $m$ platí

$$M_{\varphi,\bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi},\varphi} = \mathrm{I}_m \tag{12.20}$$

## ÚLOHY KE KAPITOLE 12

**12.1.** Lze zavést strukturu afinního prostoru na jednoprvkové množině $\{a\}$? Kolika způsoby?

**12.2.** Lze definovat afinní strukturu na množině $A = \{a, b\}$, kde $a \neq b$?

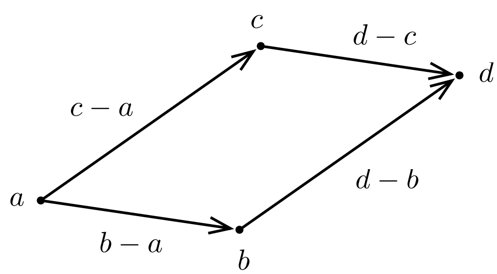
**12.3.** Uveďte příklad množiny $A$, vektorového prostoru $U$ a zobrazení $+_A$ tak, aby v definici afinního prostoru

1. nebyla splněna podmínka 1 a byla splněna podmínka 2,

2. byla splněna podmínka 1 a vektor $u$ z podmínky 2 neexistoval,
3. byla splněna podmínka 1 a vektor $u$ z podmínky 2 existoval více než jeden.

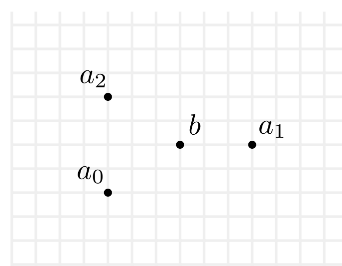
**12.4.** Ověřte, že v definici kanonické struktury afinního prostoru na vektorovém prostoru jsou splněny podmínky definice afinního prostoru.

**12.5.** Libovolné tři body $a$, $b$, $c$ afinního prostoru lze jednoznačně „doplnit na rovnoběžník“ v tom smyslu, že existuje právě jeden bod $d$ takový, že vektor $d-c$ je roven vektoru $b-a$ a vektor $d-b$ je roven vektoru $c-a$. Dokažte. Situace je znázorněna na obrázku 12.4. .




Obrázek 12.4: obrázek k úloze 12.5

**12.6.** Nalezněte a zakreslete do obrázku afinní kombinace $a_0+a_1-a_2$ a $\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{2}a_1+a_2$ (viz obr. 12.5). Jako pomocné body použijte postupně všechny čtyři body z obrázku.




Obrázek 12.5: Obrázek k úloze 12.6.

**12.7.** Jaká afinní kombinace bodů $a_0$, $a_1$, $a_2$ z předchozího příkladu je rovna $b$?

**12.8.** Uveďte příklad afinního prostoru $A$ a množiny $B \subseteq A$, která má všechny vlastnosti z Věty 12.6 kromě podmínky 1.

**12.9.** Uveďte příklad afinního prostoru $A$ a množiny $B \subseteq A$, která má všechny vlastnosti z Věty 12.6 kromě podmínky 2.

**12.10.** Rozhodněte, zda následující podmínka je ekvivalentní podmínce „$B$ je afinním podprostorem $A$“: $B$ je neprázdná podmnožina $A$ a existuje podmnožina $V \subseteq U$ tak, že jsou splněny následující podmínky:

1. Pro každé $a \in B$, $u \in V$ platí $a + u \in B$.
2. Pro každé $a, b \in B$ platí $b - a \in V$.

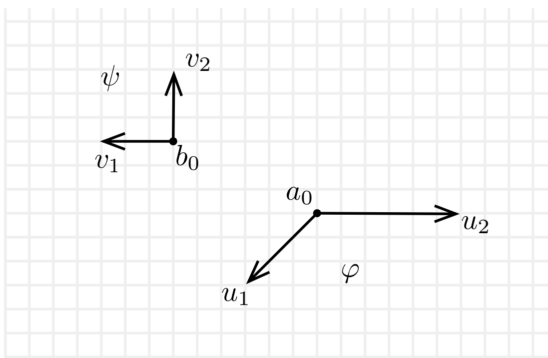
**12.11.** Charakterizujte všechny afinní podprostory $B \subseteq \mathrm{R}^2$.

**12.12.** Charakterizujte všechny afinní podprostory $B \subseteq \mathrm{R}^3$.

**12.13.** V afinním prostoru $\mathrm{R}^2$ mají vzhledem k afinní bázi $\varphi$ body $[1,1]$, $[1,2]$ a $[-1,1]$ souřadnice (po řadě) $[0,1,1]$, $[0,-1,1]$ a $[-2,-1,1]$. Najděte afinní bázi $\varphi$.

**12.14.** Lze změnit číselné údaje v zadání předchozí úlohy tak, aby neměla řešení?

**12.15.** Napište matici přechodu od afinní báze $\varphi$ k afinní bázi $\psi$, které jsou zadány obrázkem 12.6.




Obrázek 12.6: Dvě afinní báze.

**12.16.** Napište matici přechodu od afinní báze $\varphi = (u_1, u_2, a_0)$ k afinní bázi $\bar{\varphi} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{a}_0)$ afinního prostoru $\mathrm{R}^2$, je-li

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{a}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**12.17.** Rozhodněte, zda existují dvě afinní báze $\varphi$ a $\varphi'$ afinní roviny $A$ tak, že matice přechodu $M_{\varphi',\varphi}$ je rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**12.18.** Máme dvojrozměrný afinní prostor $A$ s afinní bazí $\varphi$. Napište v bázi $\varphi$ parametrickou rovnici přímky procházející body o zkrácených souřadnicích $[1,2]$, $[-1,3]$.

**12.19.** Napište parametrickou rovnici afinního obalu množiny $\{a,b,c\}$ v afinní bázi $\varphi$, jestliže (ve zkráceném souřadnicovém vyjádření)

1. $a_\varphi = [1,1,0]$, $b_\varphi = [-1,2,1]$, $c_\varphi = [0,-1,-1]$,
2. $a_\varphi = [1,2,0]$, $b_\varphi = [-1,2,2]$, $c_\varphi = [2,2,-1]$.

**12.20.** Pro oba afinní podprostory z úlohy 12.19 rozhodněte, zda obsahují bod $d$, jestliže

1. $d_\varphi = [0,2,1]$,
2. $d_\varphi = [0,3,2]$.

**12.21.** Máme afinní bázi $\psi$ afinního prostoru z úlohy 12.19 s maticí přechodu

$$M_{\psi,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Napište parametrické rovnice podprostorů z příkladu 12.19 v bázi $\psi$.

# Kapitola 13

# Afinní zobrazení

V této kapitole budeme pracovat s afinními prostory $A$ a $B$ se zaměřeními (po řadě) $U$ a $V$.

## 13.1 Definice a příklady afinních zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ afinních prostorů $A$ a $B$ se nazývá *afinní*, jestliže pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a libovolnou jejich afinní kombinaci $r^1 a_1 + r^2 a_2$ platí

$$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2). \tag{13.1}$$

Pro připomenutí pojmu afinní kombinace bodů si přečtěte začátek kapitoly 12.3. Zejména si uvědomte, že $r^1 + r^2 = 1$.

**Příklad 13.1.** Z podmínky (13.1) plyne její zobecnění na libovolný počet bodů:

$$f(r^0 a_0 + r^1 a_1 + \cdots + r^k a_k) = r^0 f(a_0) + r^1 f(a_1) + \cdots + r^k f(a_k). \tag{13.2}$$

Součet koeficientů $r^0, r^1, \ldots, r^k$ je opět roven jedné.

**Příklad 13.2.** Pro libovolný bod $b_0 \in B$ je zobrazení $f : A \to B$, definované předpisem $f(a) = b_0$ (tj. konstantní zobrazení), afinní. Pro toto zobrazení je totiž levá strana vztahu (13.1) rovna $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = b_0$ a pravá $r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2) = r^1 b_0 + r^2 b_0 = b_0$.

**Příklad 13.3.** Jak víme, identické zobrazení (identita) na množině $X$ je zobrazení $\mathrm{Id}_X$ takové, že $\mathrm{Id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$. Identita na afinním prostoru $A$ je afinní zobrazení. Důkaz přenecháme čtenáři.

**Věta 13.1.** *Kompozice dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení.*

*Důkaz.* Mějme dvě afinní zobrazení $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$. Ověříme, že kompozice $g \circ f$ je afinní zobrazení[1]. Na obě zobrazení $f$ a $g$ můžeme použít (13.1), takže pro libovolné body $a_1, a_2 \in A$ a čísla $r^1, r^2$ ($r^1 + r^2 = 1$) máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(r^1 a_1 + r^2 a_2) &= g(f(r^1 a_1 + r^2 a_2)) = g(r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)) \\ &= r^1 g(f(a_1)) + r^2 g(f(a_2)) = r^1 (g \circ f)(a_1) + r^2 (g \circ f)(a_2),\end{aligned}$$

což dokazuje, že zobrazení $g \circ f$ je afinní.

**Věta 13.2.** *Mějme afinní zobrazení $f\colon A \to B$ a afinní podprostory $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Pak množina $f(C) \subseteq B$ je afinní podprostor afinního prostoru $B$ a pokud množina $f^{-1}(D)$ je neprázdná, je afinním podprostorem afinního prostoru $A$.*

Afinní zobrazení $f\colon A \to A$ se nazývá *afinní transformace afinního prostoru $A$*. *Afinní projekce na podprostor afinního prostoru $A$* je taková afinní transformace $f\colon A \to A$, že pro každé $a \in A$ platí $f(f(a)) = f(a)$. Smyslem této podmínky je, že projekce na podprostor se v bodech množiny $f(A)$ (která je afinním podprostorem, jak víme z předchozí věty) chová jako identita: pro libovolný bod $b \in f(A)$ platí $f(b) = b$. Zobrazení $f$ tedy zobrazuje body podprostoru $f(A)$ na tytéž body. Je to vskutku tak: ke každému bodu $b \in f(A)$ existuje bod $a \in A$ takový, že $b = f(a)$, a tedy platí $f(b) = f(f(a)) = f(a) = b$. Obecněji každému surjektivnímu afinnímu zobrazení $f\colon A \to B$ říkáme *afinní projekce*.

**Příklad 13.4.** Příkladem afinní transformace afinního prostoru $A$ je *posunutí o vektor* $u_0 \in U$, což je zobrazení $\mathrm{tr}_{u_0}\colon A \to A$ (tr jako *translace*), definované předpisem

$$\mathrm{tr}_{u_0}(a) = a + u_0. \tag{13.3}$$

Je užitečné zkusit si podrobně dokázat, že opravdu jde o afinní transformaci. Identita (příklad 13.3) je rovněž afinní transformace. Je to posunutí o nulový vektor.

**Příklad 13.5.** Příkladem afinní projekce na podprostor je libovolné konstantní zobrazení $f\colon A \to A$, jak se lze snadno přesvědčit. Později se setkáme s dalšími příklady.

## 13.2 Podřízené lineární zobrazení

**Věta 13.3.** *Mějme afinní zobrazení $f\colon A \to B$. Pokud pro čtyři body $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ platí $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$, pak $f(a_2) - f(a_1) = f(a_4) - f(a_3)$.*

*Důkaz.* Z předpokladu věty plyne, že $a_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$. Platí tedy $a_4 = a_3 + a_2 - a_1$, kde na pravé straně stojí bodová kombinace bodů $a_3, a_2, a_1$ s koeficienty 1, 1 a $-1$. Podle příkladu 13.1 tedy $f(a_4) = f(a_3) + f(a_2) - f(a_1)$, neboli $f(a_4) = f(a_3) + (f(a_2) - f(a_1))$ (součet bodu a vektoru). Odtud tvrzení věty.

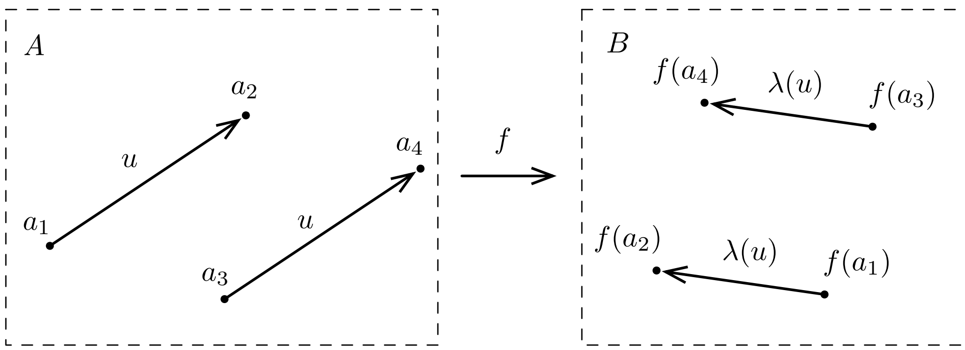
[1]Složené zobrazení (kompozice) $g \circ f$ (čteme *g po f*) je zobrazení, definované předpisem $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Pozor na pořadí, v jiném kontextu v matematice se používá opačné.

Označíme-li ve větě 13.3 vektor $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$ písmenem $u$, dostaneme $f(a_1+u) - f(a_1) = f(a_3+u) - f(a_3)$. Vektor

$$\lambda(u) = f(a_0+u) - f(a_0) \tag{13.4}$$

z vektorového prostoru $V$ tedy nezávisí na volbě bodu $a_0 \in A$, ale pouze na vektoru $u \in U$. Předpis (13.4) tedy definuje zobrazení $\lambda : U \to V$.

Obrázek 13.1 zachycuje popsanou situaci. Vidíme na něm body $a_1, a_2, a_3, a_4$ afinního




Obrázek 13.1: Afinní zobrazení a podřízené lineární zobrazení.

prostoru $A$ takové, že $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$. Obrázek ukazuje, jak by mohly vypadat obrazy těchto bodů v afinním zobrazení $f$: vektory $f(a_2) - f(a_1)$ a $f(a_4) - f(a_3)$ se rovnají, takže lze definovat zobrazení $\lambda$.

Zobrazení $\lambda : U \to V$ definované předpisem (13.4) se nazývá *zobrazení podřízené afinnímu zobrazení* $f$.

**Příklad 13.6.** Podřízené zobrazení k zobrazení $\mathrm{tr}_{u_0}$ z příkladu 13.4 je identita.

Přepsání vztahu (13.4) do tvaru

$$f(a_0+u) = f(a_0) + \lambda(u) \tag{13.5}$$

ukazuje, že ke zjištění hodnoty afinního zobrazení $f$ v bodě $a_0 + u$ stačí znát jeho hodnotu v bodě $a_0$ a hodnotu podřízeného zobrazení ve vektoru $u$. Pokud označíme $a_0 + u = a$, dostaneme jinou verzi tohoto vztahu,

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0), \tag{13.6}$$

která říká, jak vypočíst hodnotu afinního zobrazení $f$ v libovolném bodě $a$, pokud známe jeho hodnotu v bodě $a_0$ a umíme vypočítat hodnotu podřízeného zobrazení ve vektoru $a - a_0$.

(13.5) a (13.6) jsou (kromě základních vlastností matic afinních zobrazení z následující podkapitoly) nejčastěji používané vztahy pro afinní zobrazení. Umožňují řešit problémy kolem afinních zobrazení pomocí jejich podřízených zobrazení, což je výhodné díky následující větě, která říká, že podřízené zobrazení je vždy lineární, a Větě 13.5, která říká, že afinní zobrazení jsou právě zobrazení popsatelná těmito vztahy. Pracovat s afinními zobrazeními na základě definice, bez pomoci podřízených zobrazení, by bylo mnohem obtížnější.

**Věta 13.4.** *Podřízené zobrazení libovolného afinního zobrazení je lineární.*

**Věta 13.5.** *Pro libovolné dva body $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ a lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ existuje právě jedno afinní zobrazení $f : A \to B$ takové, že $f(a_0) = b_0$ a $\lambda$ je podřízené zobrazení zobrazení $f$.*

*Důkaz.* Ze vztahu (13.6) plyne, že je-li dána hodnota zobrazení $f$ v bodě $a_0$ a podřízené zobrazení $\lambda$, jsou hodnoty zobrazení $f$ ve všech ostatních bodech afinního prostoru $A$ jednoznačně určeny. Zobrazení $f$ daných vlastností tedy existuje nejvýše jedno a pokud existuje, je dáno vztahem (13.6).

Je tedy třeba dokázat, že zobrazení $f$ dané tímto vztahem je afinní a jeho podřízené zobrazení je $\lambda$. Zvolme tedy libovolně dva body $a_1, a_2 \in A$ a čísla $r^1, r^2 \in R$ taková, že $r^1 + r^2 = 1$. Dále označme $a_1 - a_0 = u_1$, $a_2 - a_0 = u_2$. Podle vztahu (13.6) máme

$$\begin{aligned} f(r^1 a_1 + r^2 a_2) &= b_0 + \lambda(r^1 a_1 + r^2 a_2 - a_0) \\ &= b_0 + \lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) \\ &= b_0 + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) \\ &= r^1 \lambda(a_1) + r^2 \lambda(a_2). \end{aligned}$$

$f$ je tedy afinní zobrazení. Hodnota jeho podřízeného zobrazení ve vektoru $u \in U$ je podle (13.1) rovna

$$f(a_0 + u) - f(a_0) = f(a_0) + \lambda(u) - f(a_0) = \lambda(u).$$

Zobrazení $\lambda$ je tedy podřízeným zobrazením afinního zobrazení $f$.

**Příklad 13.7.** *Středová souměrnost se středem $a_0 \in A$* je zobrazení $f : A \to A$ definované předpisem

$$f(a) = 2a_0 - a$$

(na pravé straně je afinní kombinace, kterou lze také přepsat jako součet bodu a vektoru: $f(a) = a_0 + (a_0 - a)$). Středová souměrnost je afinní transformace afinního prostoru $A$. To lze odvodit přímo z definice afinního zobrazení (obtížnější), nebo pomocí Věty 13.5 (jednodušší). Podřízené lineární zobrazení středové souměrnosti je $\lambda(u) = -u$.

## 13.3 Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím

Mějme afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ afinního prostoru $A$ se zaměřením $U$ a afinní bázi $\psi = (\beta, b_0)$, $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ afinního prostoru $B$ se zaměřením $V$. Dále mějme afinní zobrazení $f : A \to B$ s podřízeným lineárním zobrazením $\lambda : U \to V$. Naším cílem je najít způsob, jak ze souřadnicového vyjádření $a_\varphi$ bodu $a \in A$ vzhledem k bázi $\varphi$ vypočítat souřadnicové vyjádření $f(a)_\psi$ jeho obrazu $f(a)$ při zobrazení $f$ vzhledem k bázi $\psi$.

Máme

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0),$$

čili podle (12.14) a s použitím matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ lineárního zobrazení $\lambda$ vzhledem k bazím $\alpha$, $\beta$,

$$\begin{aligned} f(a)_\psi &= \lambda(a-a_0)_\psi + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot (a-a_0)_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_0)_\psi \\ &= \left( \begin{array}{ccc} & \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \cdot (a-a_0)_\alpha + f(a_0)_\psi . \end{aligned}$$

Pokud nyní sestavíme blokovou matici

$$\mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi} = \left( \begin{array}{ccc|c} & \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} & & f(a_0)_\psi \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right), \tag{13.7}$$

dostaneme

$$f(a)_\psi = \mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi} \cdot a_\varphi . \tag{13.8}$$

Matice $\mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi}$ se nazývá *matice afinního zobrazení $f$ vzhledem k bazím $\varphi$, $\psi$*. K sestavení této matice potřebujeme následující údaje: matici lineárního zobrazení $\lambda$ vzhledem k vektorovým bazím $\alpha$, $\beta$ a souřadnice bodu $f(a_0)$ vzhledem k afinní bázi $\psi$. Pro afinní zobrazení $f : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$ a kanonické afinní báze $\varphi$ prostoru $\mathrm{R}^m$ a $\psi$ prostoru $\mathrm{R}^n$ značíme matici $\mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi}$ jednoduše $\mathrm{M}^f$.

**Příklad 13.8.** Pomocí matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím je snadné charakterizovat všechny funkce $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, které jsou afinními zobrazeními. Jak víme z předpisu (13.7), matice takové funkce (vzhledem ke kanonickým bazím) má tvar

$$\mathrm{M}^f = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $p$ a $q$ jsou nějaká čísla. Pro funkční hodnotu $f(a)$ funkce $f$ v čísle $a \in \mathrm{R}$ platí

$$\begin{pmatrix} f(a) \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{M}^f \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$f(a) = pa + q \tag{13.9}$$

je obecný předpis pro afinní zobrazení $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. V matematické analýze by se místo písmene $a$ spíše použilo $x$ a předpis by vypadal takto: $f(x) = px + q$. Afinní zobrazení z $\mathrm{R}$ do $\mathrm{R}$ jsou tedy přesně funkce, kterým se v matematické analýze obvykle říká lineární funkce. Zde se nesmíme nechat zmást nekonzistentní terminologií; tyto funkce určitě všechny nejsou lineárními zobrazeními ve smyslu lineární algebry (které jsou?).

## 13.4 Matice afinního zobrazení a matice přechodu

Nejprve ukážeme, že matice přechodu je speciálním případem matice afinního zobrazení.

**Věta 13.6.** *Matice identického zobrazení* $\mathrm{id}_A : A \to A$ *vzhledem k afinním bazím* $\varphi$, $\psi$ *je rovna matici přechodu mezi těmito bazemi:*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{id}_A}_{\psi,\varphi} = \mathrm{M}_{\psi,\varphi}. \tag{13.10}$$

*Důkaz.* Lze provést různými způsoby, například srovnáním vztahů (12.18) a (13.8).

Dále si ukážeme, jak lze matic přechodu použít k převedení matice afinního zobrazení od jedné dvojice bazí k druhé.

**Věta 13.7.** *Pro afinní zobrazení* $f\colon A \to B$ *a afinní báze* $\varphi$, $\varphi'$ *prostoru* $A$ *a* $\psi$, $\psi'$ *prostoru* $B$ *platí*

$$M^f_{\psi',\varphi'} = M_{\psi',\psi} \cdot M^f_{\psi,\varphi} \cdot M_{\varphi,\varphi'}. \tag{13.11}$$

*Důkaz.* Víme, že pro libovolný bod $a \in A$ platí $f(a)_{\psi'} = M^f_{\psi',\varphi'} \cdot a_{\varphi'}$. Ukážeme, že pokud vektorem $a_{\varphi'}$ vynásobíme matici na pravé straně (13.11), dostaneme stejný výsledek. Postupně použijeme, co víme o matici afinního zobrazení a matici přechodu (vztahy (12.18) a (13.8)). Dostaneme

$$\begin{aligned} M_{\psi',\psi} \cdot M^f_{\psi,\varphi} \cdot M_{\varphi,\varphi'} \cdot a_{\varphi'} &= M_{\psi',\psi} \cdot (M^f_{\psi,\varphi} \cdot (M_{\varphi,\varphi'} \cdot a_{\varphi'})) \\ &= M_{\psi',\psi} \cdot (M^f_{\psi,\varphi} \cdot a_{\varphi}) = M_{\psi',\psi} \cdot f(a)_{\psi} = f(a)_{\psi'}. \end{aligned}$$

# Literatura


[1] Bican L., *Lineární algebra a geometrie.* Praha, Academia, 2004.