Konzistence a úplnost

LKFP přednáška 2, jaro 2024/25

Michal Krupka

1. června 2025

1 Úvod

Formule $M = N$ nazýváme *rovnice*. Rovnice je *uzavřená*, když $M, N \in \Lambda^0$.

Teorie τ je *konzistentní*, pokud z $\lambda + \tau$ nelze dokázat každou rovnici. Píšeme $\mathrm{Con}(\tau)$. Samotné λ a $\lambda\eta$ jsou konzistentní (tedy $\mathrm{Con}(\lambda)$ a $\mathrm{Con}(\lambda\eta)$), což je jedním ze dvou hlavních témat této přednášky.

Příklad 1.1. Platí $\mathrm{Con}(\mathrm{S} = \mathrm{K})$? Odvodíme: $\mathrm{S} = \mathrm{K} \Rightarrow \mathrm{S}ABC = \mathrm{K}ABC \Rightarrow AC(BC) = AC$. Pro $A = C = \mathrm{I}$ dostáváme $B\mathrm{I} = \mathrm{I}$. Položme $B \equiv \mathrm{K}D$. Pak $B\mathrm{I} = \mathrm{I} \Rightarrow D = \mathrm{I}$. Odtud už lze dokázat každou uzavřenou rovnici. Teorie $\mathrm{S} = \mathrm{K}$ je tedy nekonzistentní.

Výrazy M a N nazýváme *nekompatibilní*, pokud teorie $M = N$ není konzistentní. Pak rovnici $M = N$ nazýváme *kontradikce*.

Příklad 1.2. $x = y$ je kontradikce: $x = y \Rightarrow \lambda xy.x = \lambda xy.y \Rightarrow (\lambda xy.x)MN = (\lambda xy.y)MN \Rightarrow M = N$.

Cvičení. Ukažte, že toto jsou kontradikce:

$$xx = xy, \qquad\qquad (xy)z = x(yz).$$

(To druhé by byla „asociativita aplikace“.)

Konzistenci teorií λ a $\lambda\eta$ (a dalších) budeme dokazovat pomocí *redukcí*, kdy se výrazy pomocí jistých pravidel převádějí na jiné výrazy. Základním případem je *β-redukce*: libovolný podvýraz tvaru $(\lambda x.M)N$ můžeme ve výrazu nahradit výrazem $M[x := N]$ podobně jako u β-konverze.

Konkrétní typ redukce se zadává *osnovou redukce* (*notion of reduction*), což je libovolná binární relace na Λ (v přiloženém textu je ze začátku použit méně vhodný termín *pojem redukce*). Např. β-redukce je zadána osnovou

$$\beta = \Big\{ \big((\lambda x.M)N, M[x := N]\big) \mid M, N \in \Lambda \Big\}.$$

Dále definujeme *normální formu* jako výraz, který nelze redukovat, a relaci *převoditelnosti* výrazů jako ekvivalenci výrazů, které lze na sebe vzájemně (jakkoli složitě) redukovat. Pomocí těchto pojmů lze pak pro některé teorie (např. λ a $\lambda\eta$) ukázat jejich konzistenci a také logickou *úplnost* v tom smyslu, že rovnice $M = N$ je dokazatelná, právě když jsou výrazy M a N vzájemně převoditelné.

Přesné definice, tvrzení a důkazy najdete v přiloženém starším ručně psaném textu.