VÝPOČTY

Kombinátory pevného bodu

Chceme-li najít λ-výraz F takový, že

$$FMN = N\lambda x.xM,$$

víme, že můžeme položit

$$F \equiv \lambda mv.m\lambda x.xv.$$

Co ale udělat, pokud se na pravé straně vyskytuje F? Například:

$$FMN = FNMMF$$

Můžeme položit

$$F = \lambda uv.FvuuF,$$

což ještě není ono, ale vidíme, že musí platit

$$F = (\lambda fuv.fvuuf)F.$$

F tedy můžeme najít jako pevný bod termu $\lambda fuv.fvuuf$. K ~~..~~ vyjádření rekurze tedy lze používat pevné body.

Připomeňme:

<u>Věta o pevném bodě</u>. Ke každému M existuje X tak, že $MX = X$.

<u>Důkaz</u>. Položíme $X \equiv WW$, kde $W \equiv \lambda x. M(xx)$.

V důkazu je X vlastně vypočítáno jako $X \equiv YM$, kde

$$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)).$$

Platí $M(YM) = YM$. To je podmínka na tzv. <u>kombinátory pevného bodu</u> (fix-point combinators).

Obecně: C je kombinátor pevného bodu, pokud splňuje

$$M(CM) = CM.$$

Y se nazývá <u>Curryho paradoxní kombinátor</u> nebo <u>Y-kombinátor</u>.

~~Všimněme si, že v důkazu věty se dokazuje $X \twoheadrightarrow MX$, nikoliv naopak.~~

~~Kombinátorů pevného bodu je nekonečně mnoho. Tento:~~

$$\cancel{\Theta \equiv AA, \quad \text{kde} \quad A \equiv \lambda xy.y(xxy)}$$

~~splňuje opačný směr $M(\Theta M) \twoheadrightarrow \Theta M$.~~

Y-kombinátor splňuje pouze rovnost

$$M(YM) = YM$$

Kombinátor $\Theta \equiv AA$, kde $A \equiv \lambda xy.y(xxy)$, je kombinátorem pevného bodu a platí

$$\Theta M \twoheadrightarrow M(\Theta M).$$

Obecně kombinátorů pevného bodu je nekonečně mnoho. Všechny jsou pevné body kombinátoru G:

<u>Böhmova-van der Meyova věta</u>. Pro $G \equiv \lambda yf.f(yf)$ $(= SI)$ platí, že C je kombinátor pevného bodu právě když $C = GC$.

$\boxed{\text{udělat si důkaz je užitečné}}$ – cvičení

Položme

$$Y^0 \equiv Y$$
$$Y^{n+1} \equiv Y^n G.$$

$Y^0, Y^1, Y^2, \ldots$ je posloupnost neekvivalentních kombinátorů pevného bodu.

Numerály

Položíme (lépe značit True a False)

$\mathrm{True} \equiv \lambda xy.x \ (\equiv K)$, $\mathrm{False} \equiv \lambda xy.y \ (= KI)$.

True a False představují ~~tzv.~~ logické hodnoty. Pro

$$\mathrm{if} \equiv \lambda pca.\,pca$$

je

$$\mathrm{if}\ \mathrm{True}\, MN \twoheadrightarrow M$$

$$\mathrm{if}\ \mathrm{False}\, MN \twoheadrightarrow N.$$

Cvičení. Definovat logické operace. Např.:

$$\mathrm{and} \equiv \lambda xy.\,xy\,\mathrm{False}$$

negaci dvěma způsoby

Dvojice: Položíme $[\,,\,] \equiv \lambda xyz.zxy$.

Tedy $[M,N] \equiv \cancel{[M,N] \equiv \lambda z.zMN} \equiv [\,,\,]MN \twoheadrightarrow \lambda z.zMN$.

Projekce: $[M,N]_0 \equiv [M,N]\,\mathrm{True} \to \mathrm{True}\,MN \twoheadrightarrow M$

$[M,N]_1 \equiv [M,N]\,\mathrm{False} \to \mathrm{False}\,MN \twoheadrightarrow N$

Lze definovat: $(\cdot)_0 \equiv \lambda x.x\,\mathrm{True}$, $(\cdot)_1 \equiv \lambda x.x\,\mathrm{False}$

Zajímavé: neplatí $[(M)_0,(M)_1] = M$ a dvojice nejde definovat tak, aby to platilo. Důkaz?

a konečné <u>numerály</u>:

Klademe $\ulcorner 0 \urcorner \equiv I$, $\ulcorner n+1 \urcorner \equiv [\mathrm{False}\ \ulcorner n \urcorner]$.

To jsou standardní numerály, existují i jiné!

Existují výrazy

$$S^+ \ \dots\dots \ \text{následník}$$

$$P^- \ \dots\dots \ \text{předchůdce}$$

$$\mathrm{Zero} \ \dots \ \text{test na nulu}$$

tak, že

$$S^+ \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n+1 \urcorner$$

$$P^- \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n-1 \urcorner \qquad (\text{pro } n \neq 0)$$

$$\mathrm{Zero}\ulcorner 0 \urcorner = \mathrm{True}, \quad \mathrm{Zero}\ulcorner n \urcorner = \mathrm{False} \quad (\text{pro } n > 0).$$

a to:

$$S^+ \equiv \lambda x.[\mathrm{False}\ x]$$

$$P^- \equiv \lambda x.x\,\mathrm{False} \qquad (\text{vyjde } P^- \ulcorner 0 \urcorner = \mathrm{False})$$

$$\mathrm{Zero} \equiv \lambda x.x\,\mathrm{True}.$$

<u>Cvičení</u>. Dokažte.

~~<u>Cvičení</u>. Definujte sčítání~~

Operace na numerálech, např.

$$+ \equiv \lambda xy.\ \text{if}\ (\text{zero}\ x)\ y\ (+\ (P^{-}x)\ (S^{+}y))$$

(rekurze!)

Otázka: jaké funkce $N^k \to N$ lze definovat pomocí λ-termů?

Funkce $f: N_0^k \to N_0$ se nazývá <u>λ-definovatelná</u>, jestliže existuje $F \in \Lambda$ tak, že pro každé $\vec{n} \in N^k$ platí $(\vec{n} = (n_1, \dots, n_k))$

$$\ulcorner f(\vec{n}) \urcorner = F \ulcorner \vec{n} \urcorner. \qquad (\ulcorner \vec{n} \urcorner \equiv \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner)$$

O tom víc příště.

<u>Cvičení</u> Churchovy numerály

$$c_n \equiv \lambda f x. f^n(x)$$

~~Př~~ Následník: $S_c^+ \equiv \lambda abc.\, b\,(abc)$ – ověřte

Definujte sčítání a násobení, ~~př~~ předchůdce (rekurze)