PŘEDNÁŠKA 1, 26. 9. 2017, KMI/LKFP

λ-výrazy (λ-termy)

Abeceda:

x, y, z ... proměnné

λ ... abstraktor

$($, $)$ ... závorky

Množina Λ λ-termů je nejmenší množina taková, že

1. $x \in \Lambda$ když x je proměnná
2. když $M \in \Lambda$, pak $(\lambda x M) \in \Lambda$ (abstrakce)
3. když $M, N \in \Lambda$, pak $(MN) \in \Lambda$ (aplikace)

Konvence:

- vynecháváme závorky
- $MNL \equiv (MN)L$
- $\lambda x . M \equiv (\lambda x M)$
- obecněji: $\lambda x_1 \ldots x_n . M \equiv \lambda \vec{x} . M \equiv (\lambda x_1 (\ldots (\lambda x_n M) \ldots))$

$\equiv$: syntaktická rovnost

Volné a vázané proměnné (free, bound)

$M \in \Lambda$. Def $FV(M)$:

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(\lambda x. M) = FV(M) \setminus \{x\}$
- $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$

$M \in \Lambda$. Def $BV(M)$:

- $BV(x) = \emptyset$
- $BV(\lambda x. M) = BV(M) \cup \{x\}$
- $BV(MN) = BV(M) \cup BV(N)$

Proměnná může být současně volná i vázaná:

$$M \equiv x(\lambda xy. x)$$

$FV(M) = ?$
$BV(M) = ?$ (cvičení)

- M je uzavřený (kombinátor), když $FV(M) = \emptyset$.
- $\Lambda^0 \subseteq \Lambda$ ... množina všech kombinátorů
- $\Lambda^0(\vec{x})$ ... množina všech M: $FV(M) \subseteq \{\vec{x}\}$
- Uzávěr M: $\lambda \vec{x}. M$, kde $\{\vec{x}\} = FV(M)$

Podvýrazy

Pro $M \in \Lambda$ je $Sub(M)$ množina všech podvýrazů M. Definujte sami. (cvičení)

TEORIE λ

Z λ-termů zkonstruujeme formule. Máme axiomy a odvozovací pravidla, teorémy.

Formule: $M = N$.

~~Pravidla~~ Axiomy a pravidla:

- $(\lambda x.M)N = M[x:=N]$ (β-redukce)

  nahradit všechny volné výskyty x v M termem N.

- $M = M$
- $\dfrac{M = N}{N = M}$
- $\dfrac{M = N, \quad N = L}{N = L}$
- $\dfrac{M = N}{MZ = NZ}$
- $\dfrac{M = N}{ZM = ZN}$

$$\frac{M = N}{\lambda x.M = \lambda x.N}$$ (ξ ... slabá extenzionalita)

Church měl ještě α-konverzi:

$$\lambda x.M = \lambda y.M\{x:=y\},$$

kde y se nevyskytuje v M.

My řešíme jinak, <u>syntakticky</u>:

$$\lambda x.x \equiv \lambda y.y \quad \text{atd.}$$

Navíc předpokládáme, že ~~pro každý výraz se kterým pracujeme~~ žádná proměnná není současně volná a vázaná.

Tím předcházíme problémům s konfliktem názvů.

$$(\lambda xy.y)x \overset{X}{=} \underline{\lambda x.x} \qquad (\lambda zy.y)x = \underline{\lambda z.x}$$

(lze „dokázat", že všechny výrazy se rovnají) čemu?

<u>Věta o pevném bodě</u>

Pro každé F ex. X: $FX = X$

<u>Důkaz</u>. $W \equiv \lambda x.F(xx)$, $X \equiv WW$.

Použití: rekurse. (Příklad s faktoriálem)