KONTEXTY A REFERENČNÍ TRANSPARENTNOST

Kontext chápeme jako „λ-výraz s dírou (dírami)", do které lze dosadit jiný λ-výraz. (nejsou defi- nované λ-výrazy)

Množina $\mathcal{C}[\,]$ λ-kontextů je nejmenší množina taková, že

1. $x \in \mathcal{C}[\,]$
2. $[\,] \in \mathcal{C}[\,]$
3. Jestliže $C_1[\,], C_2[\,] \in \mathcal{C}[\,]$, pak
$$(C_1[\,]C_2[\,]), (\lambda x C_1[\,]) \in \mathcal{C}[\,].$$

„Díra" je reprezentována „$[\,]$". Značení pro kontexty vždy končí „$[\,]$" (např. $C_1[\,], C_2[\,]$ výše).
Používáme zjednodušené značení pro kontexty podobně jako u λ-výrazů. Např:

$$C[\,] \equiv (\lambda x.[\,]x)M$$

je kontext (M je λ-výraz).

Dosazovaný λ-výraz píšeme do $[\,]$. Takže:

$$C[\lambda y.y] \equiv (\lambda x.(\lambda y.y)x)M$$

Kontexty se nevytvářejí modulo α-kongruence. (Proč?)

Referenční transparentnost

Je-li $C[\,]$ kontext a $M = N$, pak $C[M] = C[N]$

Důkaz. Indukcí přes strukturu $C[\,]$. (cvičení)

Referenční transparentnost je základní vlastnost funkcionálních jazyků.

EXTENZIONALITA

„=" je intensionální rovnost. Přitom

$$(\lambda x.Mx)N = MN \qquad (x \notin FV(M))$$

pro libovolné N. $\lambda x.Mx$ a M dávají stejné hodnoty. Z extensionálního pohledu se rovnají. Formuli

$$\lambda x.Mx = M \qquad (x \notin FV(M))$$

ale nelze odvodit z λ. (není teorém)

Přidejme pravidlo

$$\frac{Mx = Nx}{M = N} \quad x \notin FV(MN) \qquad (ext)$$

Dostaneme teorii $\lambda + ext$.

Druhá možnost je přidat axiom (Church):

$$\lambda x.Mx = M \qquad (x \notin FV(M)) \qquad (\eta)$$

(Teorie $\lambda\eta$).

Teorie $\lambda+ext$ a $\lambda\eta$ jsou ekvivalentní

Důkaz.

1. $\lambda + ext \vdash \lambda x.Mx = M \quad (x \notin FV(M))$

   Podle (β):

   $$(\lambda x.Mx)x = Mx,$$

   takže podle (ext) $\lambda x.Mx = M$.

2. $\lambda\eta \vdash ext$

   Předpokládejme $Mx = Nx \quad (x \notin FV(MN))$.

   Pak podle (ξ): $\lambda x.Mx = \lambda x.Nx$.

   Použitím (η) vlevo i vpravo $M = N$.

Extenzionalita se v praxi nepoužívá.
$\lambda x.Mx$ je „hodnota", samotné M se může zacyklit.

KONZISTENCE A ÚPLNOST

Formule $M = N$ nazýváme rovnice. Rovnice je uzavřená, když $M, N \in \Lambda^0$.

Teorie T (množina rovnic) je konzistentní, pokud z $\lambda + T$ nelze dokázat každou uzavřenou rovnici. Píšeme $Con(T)$. Samotné λ a $\lambda\eta$ jsou konzistentní (důkaz zatím neuvádíme).

Příklad, že podmínka konzistence je hodně křehká:
Položme

$$S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$$
$$K \equiv \lambda xy.x$$
$$I \equiv \lambda x.x$$

Platí $Con(S = K)$?

$$S = K \Rightarrow SABC = KABC$$
$$\Rightarrow AC(BC) = AC$$

Pro $A = C = I$ dostáváme $BI = I$.

Položme $B = KD$. Pak $BI = I \Rightarrow D = I$, tedy teorie $S = K$ je nekonzistentní.

Výrazy M a N jsou nekompatibilní, pokud teorie $M = N$ je nekonzistentní. Píšeme $M \# N$.

Příklad. $x \# y$.

$$x = y \Rightarrow \lambda xy.x = \lambda xy.y \Rightarrow (\lambda xy.x)MN = (\lambda xy.y)MN$$
$$\Rightarrow M = N.$$

Příklad. $xx \# xy$ (cvičení)

Příklad. Aplikace není asociativní: $x(yz) \# (xy)z$ (cvičení)

β-normální forma

λ-výraz M je v β-normální formě (tvaru), jestliže nemá podvýraz tvaru $(\lambda x.R)S$.

M má β-normální formu (tvar) jestliže existuje $N \in \Lambda$ v β-normálním tvaru takový, že $M = N$.

Příklady.

$\lambda x.x$	je v β-nf
$(\lambda xy.x)(\lambda x.x)$	má β-nf
$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$	nemá β-nf

$\beta\eta$ - normální forma

Analogicky. Navíc, aby M bylo v $\beta\eta$-normálním tvaru, nesmí obsahovat podterm $(\lambda x. Rx)$, $x \notin FV(R)$

Tvrzení

1. M má β-nf právě když má $\beta\eta$-nf.
2. Pokud M a N jsou různé β-nf, pak $M = N$ není teorém λ. ~~[illegible]~~ Podobně $\beta\eta$-nf, $\lambda\eta$.
3. Pokud M a N jsou různé $\beta\eta$-nf, pak $M \# N$.

Tvrzení

Jestliže M a N mají nf, pak buď $\lambda\eta \vdash M = N$, nebo $\lambda\eta + (M = N)$ je nekonzistentní.

Důkazy příště (?)