REDUKCE

Doposud jsme mluvili o konverzi. Pro $\lambda \vdash M = N$ říkáme, že M a N jsou (vzájemně) konvertibilní.

(název β-redukce byl nesprávný, patří β-konverze.)

Výpočty (úpravy) jdou ale často jen jedním směrem:

$$(\lambda x. x^2+1)3 = 10$$

můžeme chápat jako „výsledkem výpočtu $(\lambda x. x^2+1)3$ je 10", ale nikoliv naopak.

To nás vede k redukci.

Pojmy redukce (redukční pojmy)

Můžeme mít různé redukce (podle různých pravidel) proto se jimi budeme zabývat obecně.

Binární relace R na Λ je kompatibilní, když z $(M, M') \in R$ plyne:

- $(ZM, ZM') \in R$
- $(MZ, M'Z) \in R$
- $(\lambda x.M, \lambda x.M') \in R$.

R je kompatibilní právě když pro libovolné $M, M' \in \Lambda$ a kontext $C[\;]$ s jednou dírou z $(M, M') \in R$ plyne $(C[M], C[M']) \in R$.

Každá binární relace na Λ má *kompatibilní uzávěr*. (Důkaz?)

Rovnost (*kongruence*, *konvertibilita*) na Λ je kompatibilní ekvivalence.

Například relace mezi $M, N \in \Lambda$ dané $\lambda \vdash M = N$, resp. $\lambda\eta \vdash M = N$ jsou rovnosti na Λ.

(Relace) *redukce na Λ* je kompatibilní, reflexivní a tranzitivní.

Pojem redukce (redukční pojem) na Λ (*notion of reduction*) je libovolná binární relace R na Λ.

Například $\underline{\beta} = \{((\lambda x.M)N, M[x := N]) \mid M, N \in \Lambda\}$ je pojem redukce.

$\to_R$: *jeden krok R-redukce*: kompatibilní uz. R

$\twoheadrightarrow_R$: *R-redukce*: reflex. a tranzit. uzávěr $\to_R$

$=_R$: *R-rovnost* (*R-konvertibilita*): ekviv. generovaná $\twoheadrightarrow_R$.

Poznámky ke kompatibilitě

- Pojem kompatibilního uzávěru má smysl, pokud průnikem kompatibilních relací je opět kompatibilní relace. To je třeba dokázat. Uzávěr R je pak průnik všech kompatibilních $S \supseteq R$.

- $\twoheadrightarrow_R$ a $=_R$ jsou kompatibilní. Dokazuje se indukcí.
Například pro $\twoheadrightarrow_R$:

1. Předpokl., že $M \twoheadrightarrow_R N$ protože $M \equiv N$. Pak $C[M] \equiv C[N]$, takže $C[M] \twoheadrightarrow_R C[N]$.
2. Předp., že $M \twoheadrightarrow_R N$ protože $M \rightarrow_R N$. Jelikož $\rightarrow_R$ je kompatibilní, máme $C[M] \rightarrow_R C[N]$ a tedy (protože $\rightarrow_R \subseteq \twoheadrightarrow_R$) $C[M] \twoheadrightarrow_R C[N]$.
3. To byl základní krok indukce. Teď předp., že $M \twoheadrightarrow_R N$ a ex. L tak, že $M \twoheadrightarrow_R L$, $L \twoheadrightarrow_R N$ a (indukční předpoklad:) $C[M] \twoheadrightarrow_R C[L]$, $C[L] \twoheadrightarrow_R C[N]$.
Z tranzitivity: $C[M] \twoheadrightarrow_R C[N]$.

C.B.D.

Příklad.

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \to_\beta (\lambda y.y)(\lambda y.y)z$$
$$\to_\beta (\lambda y.y)z \to_\beta z.$$

Tedy $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \twoheadrightarrow_\beta z$.
a tedy $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z =_\beta z$.

R-normální forma

- M je R-redex (reducible expression), když existuje N tak, že $(M,N) \in R$.
  N je ~~R-kontrakt~~ R-kontraktum M.
- M je R-normální forma (v R-nf), pokud neobsahuje R-redex (jako podvýraz)
- N je R-normální forma výrazu M, pokud je R-nf a $M =_R N$.

„Proces kontrakce"

Příklad. $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$ je β-redex. Proto $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z$ není β-nf, ale má β-nf.

Tvrzení.

Jestliže $M \to_R N$, pak ex. $C[\;]$ s jednou dírou, $P, Q \in \Lambda$ tak, že $(P, Q) \in R$.

Důkaz. Z definice.

Důsledek.

Je-li M R-nf, pak

(1) Pro žádné N neplatí $M \to_R N$

(2) $M \twoheadrightarrow_R N$ implikuje $M \equiv N$.

Pozor, obecně neplatí, že pokud M splňuje (2), je v R-nf. Protipříklad:

$$M = \Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx).$$

Diamantová vlastnost

Je to vlastnost, která zaručí, že každý výraz má nejvýše jednu R-nf.

Pro binární relaci $\succ$ na Λ: Jestliže $M \succ M_1$ a $M \succ M_2$, pak ex. N tak, že $M_1 \succ N$ a $M_2 \succ N$. Zápis: $\succ \models \Diamond$.

(konfluence)

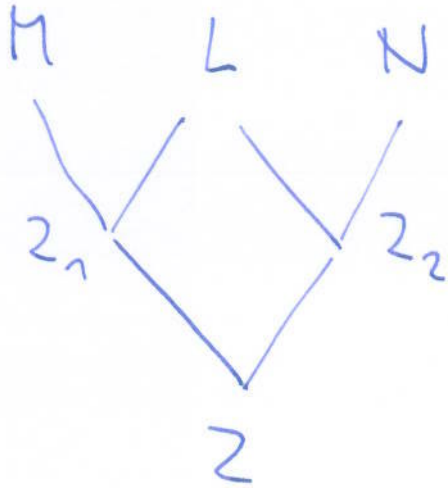
Redukční pojem R má <u>Church-Rosserovu vlastnost</u> (je <u>CR</u>), jestliže $\twoheadrightarrow_R$ má diamantovou vlastnost (splňuje diamantovou podmínku).

<u>Teorém o CR</u>

Jestliže R je CR, pak z $M =_R N$ plyne, že existuje Z tak, že $M \twoheadrightarrow_R Z$ a $N \twoheadrightarrow_R Z$.

<u>Důkaz</u>. Indukcí přes strukturu $=_R$.

1. $M =_R N$ protože $M \twoheadrightarrow_R N$. Pak stačí vzít $Z \equiv N$
2. $M =_R N$ protože $N \twoheadrightarrow_R N$. Pak $Z \equiv M$.
3. $M =_R N$ jelikož $M =_R L$, $L =_R N$ a tyto rovnosti splňují indukční předpoklad:



<u>Důsledky</u>. (R je CR)

(1) Jestliže N je R-nf M, pak $M \twoheadrightarrow_R N$.

(2) $M \in \Lambda$ má nejvýše jednu R-nf.

K důkazu výsledků z 3. přednášky o jedinečnosti β-nf stačí dokázat, že $\underline{\beta}$ je CR.