VÝPOČTY

Kombinátory pevného bodu

Chceme-li najít λ-výraz F takový, že

$$FMN = N\lambda x.xM,$$

víme, že můžeme položit

$$F \equiv \lambda uv.u\lambda x.xv.$$

Co ale udělat, pokud se na pravé straně vyskytuje F? Například:

$$FMN = FNMMF$$

Můžeme položit

$$F = \lambda uv.FvuuF,$$

což ještě není ono, ale vidíme, že musí platit

$$F = (\lambda fuv.fvuuf)F.$$

F tedy můžeme najít jako pevný bod termu $\lambda fuv.fvuuf$. K vyjádření rekurze tedy lze používat pevné body.

Připomeňme:

<u>Věta o pevném bodě</u>. Ke každému M existuje X tak, že $MX = X$.

<u>Důkaz</u>. Položíme $X \equiv WW$, kde $W \equiv \lambda x.M(xx)$.

V důkazu je X vlastně vypočítáno jako $X \equiv YM$, kde

$$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)).$$

Platí $M(YM) = YM$. To je podmínka na tzv. <u>kombinátory pevného bodu</u> (fix-point combinators).

Obecně: C je kombinátor pevného bodu, pokud splňuje

$$M(CM) = CM.$$

Y se nazývá <u>Curryho paradoxní kombinátor</u> nebo <u>Y-kombinátor</u>.

~~Všimneme si, že v důkazu věty se dokazuje $X \twoheadrightarrow MX$, nikoliv naopak.~~

~~Kombinátorů pevného bodu je nekonečně mnoho. Tento:~~

~~$\Theta \equiv AA$, kde $A \equiv \lambda xy.y(xxy)$~~

~~splňuje opačný směr $M(\Theta M) \twoheadrightarrow \Theta M$.~~

Y-kombinátor splňuje pouze rovnost

$$M(YM) = YM$$

Kombinátor $\Theta \equiv AA$, kde $A \equiv \lambda xy.y(xxy)$, je kombinátorem pevného bodu a platí

$$\Theta M \twoheadrightarrow M(\Theta M).$$

Obecně kombinátorů pevného bodu je nekonečně mnoho. Všechny jsou pevné body kombinátoru G:

<u>Böhmova - van der Meyova věta</u>. Pro $G \equiv \lambda yf.f(yf)$ $(= SI)$ platí, že C je kombinátor pevného bodu právě když $C = GC$.
(udělat si důkaz je užitečné!)

Položme

$$Y^0 \equiv Y$$
$$Y^{n+1} \equiv Y^n G.$$

$Y^0, Y^1, Y^2, \ldots$ je posloupnost neekvivalentních kombinátorů pevného bodu.

Numerály

Položíme

$$T \equiv \lambda xy.x \quad (\equiv K), \qquad F \equiv \lambda xy.y \quad (= KI).$$

T a F představují logické hodnoty. Pro

$$\mathrm{if} \equiv \lambda pca.\, pca$$

je

$$\mathrm{if}\, TMN \twoheadrightarrow M$$

$$\mathrm{if}\, FMN \twoheadrightarrow N.$$

Cvičení. Definovat logické operace. Např.:

$$\mathrm{and} \equiv \lambda xy.\, xyF$$

Dvojice: Položme $[\,,\,] \equiv \lambda xyz.zxy$.

Tedy $[M,N] \equiv \cancel{[M,N] \equiv \lambda z.zMN} \equiv [\,,\,]MN \twoheadrightarrow \lambda z.zMN$.

Projekce: $[M,N]_0 \equiv [M,N]T \to TMN \twoheadrightarrow M$

$$[M,N]_1 \equiv [M,N]F \to FMN \twoheadrightarrow N$$

Lze definovat: $(\cdot)_0 \equiv \lambda x.xT$, $(\cdot)_1 \equiv \lambda x.xF$.

Zajímavé: neplatí $[(M)_0,(M)_1] = M$ a dvojice nejde definovat tak, aby to platilo.

a konečné numerály:

Klademe $\ulcorner 0 \urcorner \equiv I$, $\ulcorner n+1 \urcorner \equiv [F, \ulcorner n \urcorner]$.

To jsou standardní numerály, existují i jiné!

Existují výrazy

S^+ .... následník

P^- .... předchůdce

Zero ... test na nulu

tak, že

$$S^+ \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n+1 \urcorner$$

$$P^- \ulcorner n \urcorner = \ulcorner n-1 \urcorner \qquad (\text{pro } n \neq 0)$$

$$\text{Zero}\ulcorner 0 \urcorner = T, \quad \text{Zero}\ulcorner n \urcorner = F \qquad (\text{pro } n > 0).$$

a to:

$$S^+ \equiv \lambda x.[F, x]$$

$$P^- \equiv \lambda x.xF \qquad (\text{vyjde } P^-\ulcorner 0 \urcorner = F)$$

$$\text{Zero} \equiv \lambda x.xT.$$

Cvičení. Dokažte.

~~Cvičení. Definujte sčítání~~

Operace na numerálech, např.

$$+ \equiv \cancel{\lambda\lambda} \; \lambda xy.\, \mathrm{if}\,(\mathrm{Zero}\; x)\, y\, (+\, (P^- x)(S^+ y))$$

(rekurze!)
Otázka: jaké funkce $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ lze definovat pomocí λ-termů?

Funkce $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se nazývá <u>λ-definovatelná</u>, jestliže existuje $F \in \Lambda$ tak, že pro každé $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ platí $\quad (\vec{n} = (n_1, \dots, n_k))$

$$\ulcorner f(\vec{n}) \urcorner = F \ulcorner \vec{n} \urcorner . \qquad (\ulcorner \vec{n} \urcorner \equiv \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_k \urcorner)$$

O tom více příště.