Vyčíslitelnost

Ukážeme, že λ-definovatelné číselné funkce jsou právě rekursivní funkce.

Rekursivní funkce (číselné funkce) jsou funkce $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$, jejichž hodnoty lze počítat mechanickým postupem.

Obecněji: Parciální rekursivní funkce. Jsou to parciální funkce $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ (definované na podmnožině $X \subseteq \mathbb{N}_0^k$). ~~Ta~~

Church a Turing dokázali, že parc. rek. fce jsou ~~(ekvivalentní Turingovým strojům a)~~ jsou právě turingovsky vyčíslitelné funkce a také právě λ-definovatelné funkce. Ekvivalenci λ-definovatelnosti a rekurzivity funkcí se budeme teď zabývat. Nejprve pro totální funkce (tedy pro $X = \mathbb{N}_0^k$).

Začneme iniciálními rekurzivními funkcemi.

Iniciální rekursivní funkce

- Z ... $Z(n) = 0$ (pro každé n) ... konstanta
- S^+ ... $S^+(n) = n+1$ ... následník
- π_k^m ... $\pi_k^m(\vec{n}) = n_k$ ... (k-tá) projekce

Rekursivní funkce. Množina rekursivních funkcí R je nejmenší množina číselných funkcí, která obsahuje iniciální rekursivní funkce a je uzavřená na kompozici, primitivní rekursi a minimalizaci, tj:

(kompozice) Jestliže funkce $\chi, \psi_1, \ldots, \psi_k$ (vhodného počtu argumentů) jsou v R, pak pro

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \ldots, \psi_k(\vec{n}))$$

je $\varphi \in R$.

(primitivní rekurse) Jestliže $\chi, \psi \in R$ a

$$\varphi(0, \vec{n}) = \psi(\vec{n})$$
$$\varphi(k+1, \vec{n}) = \chi(k, \varphi(k, \vec{n}), \vec{n}),$$

pak $\varphi \in R$.

(minimalizace) Jestliže $\chi \in R$ a

$$\varphi(\vec{n}) = \text{nejmenší } k \text{ takové, že } \chi(\vec{n}, k) = 0,$$

pak $\varphi \in R$. (Značení: $\varphi(\vec{n}) = \mu k[\chi(\vec{n}, k) = 0]$).

Minimum často nemusí existovat, pak bychom měli ~~částečnou~~ parciální rekursivní funkci.

Příklady. 1. Konstantní 1

2. Sčítání

3. Rozdíl (parciální)

Tvrzení. Funkce je rekursivní právě když je λ-vyčíslitelná.

Důkaz: příště.