Teorém (Kleene). Numerická funkce φ je rekurzivní právě když je λ-definovatelná.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Abychom dokázali λ-definovatelnost φ, ukážeme 1. že každá iniciální rekurzivní funkce je λ-definovatelná a 2. funkce vytvořená z λ-definovatelných funkcí pomocí kompozice, primitivní rekurze nebo minimalizace je λ-definovatelná. Tedy:

1. - Funkce Z je λ-definovatelná termem $\lambda x. \ulcorner 0 \urcorner$.
   - Funkce S^+ je λ-definovatelná termem S^+
   - Funkce π^m_k je λ-definovatelná termem

$$\lambda x_0 x_1 \dots x_m . x_k .$$

2. Předp., že funkce $\chi, \psi_1, \dots, \psi_k$ jsou definovány termy $S, T_1, \dots, T_k$ (pořadě). Pak φ:

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \dots, \psi_k(\vec{n}))$$

je λ-definovatelná termem

$$\lambda \vec{x}. S(T_1(\vec{x})) \dots (T_k(\vec{x})) .$$

Tím je ukázána definovatelnost kompozice.

Definovatelnost primitivní rekurze: je-li

$$\varphi(0,\vec{n}) = \psi(\vec{n})$$
$$\varphi(k+1,\vec{n}) = \chi(k,\varphi(k,\vec{n}),\vec{n})$$

a ψ a χ jsou λ-definovány termy S a T (pořadí), pak φ je λ-definováno termem

$$Y\lambda f x\vec{y}.(\mathrm{Zero}\ x)(S\vec{y})(T(f(P^{-}x)\vec{y})(P^{-}x)\vec{y}).$$

a konečná minimalizace. Nejprve definujeme výraz, který pro predikát (λ-definovaný výrazem) P, určí nejmenší numerál splňující P. Nejprve:

$$H_P \equiv \Theta(\lambda hz.(Pz)z(h(S^{+}z))).$$

a hledaný výraz:

$$\mu P \equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner.$$

Nyní, pokud funkce φ je definována takto:

$$\varphi(\vec{n}) = \mu k[\chi(\vec{n},k) = 0],$$

pak φ je λ-definována:

$$\lambda\vec{x}.\mu[\lambda y.\mathrm{Zero}(S\vec{x}y)].$$

„$\Longleftarrow$": Nejprve dokážeme, že pokud funkce φ je λ-definovaná termem F, pak

$$\varphi(\vec{n}) = m \quad \text{právě když} \quad F\ulcorner\vec{n}\urcorner = \ulcorner m\urcorner .$$

Implikace „$\Longleftarrow$" je vlastní definice, ale nová je implikace „$\Rightarrow$". Ta ovšem plyne z Churchova-Rosserova teorému.

Nyní: jelikož $\ulcorner m\urcorner$ je nf, znamená pravá strana implikace $F\ulcorner\vec{n}\urcorner \twoheadrightarrow \ulcorner m\urcorner$. To je ovšem rekursivní proces a z teorie rekursivních funkcí víme, že každá funkce, jejíž hodnoty lze získat mechanickým procesem, je rekursivní.

C.B.D.

Poslední použitý poznatek jsme si vzali z teorie rekursivních funkcí; nesouvisí s λ-kalkulem.

<u>Poznámky k parciálním funkcím</u> – PŘÍŠTĚ

– Parciální rekursivní funkce získáme tak, že v minimalizaci připustíme i konstantní nulovou.