ROZHODNUTELNOST

Uvažme množinu $A \subseteq \Lambda$ a zabývejme se, zda ji lze rozhodnout pomocí λ-termu $F \in \Lambda$ v následujícím smyslu:

$$\begin{array}{l} \text{jestliže } M \in A, \text{ pak } FM = \mathrm{True}, \\ \text{jestliže } M \notin A, \text{ pak } FM = \mathrm{False}. \end{array} \qquad (*)$$

(True a False jsme dříve značili T a F)

Je zřejmé, že jestliže A je triviální (tj. $\emptyset$ resp. Λ), F existuje a ~~je too~~ může se zvolit jako

$F \equiv \lambda x.\mathrm{False}$ resp. $F \equiv \lambda x.\mathrm{True}$.

Co když je A netriviální? Pak existuje $M_0 \in A$ a $M_1 \in \Lambda \setminus A$.

Položme $G \equiv \lambda x.\,\mathrm{If}\,(Fx)M_1M_0$.

Označme M pevný bod G. Pak:

jestliže $M \in A$, pak $M = GM = \mathrm{If}(FM)M_1M_0 = M_1$

jestliže $M \notin A$, pak $M = GM = \mathrm{If}(FM)M_1M_0 = M_0$.

Jelikož $M_1 \notin A$ a $M_0 \in A$, dostáváme v obou případech SPOR!

Tedy: netriviální množina $A \subseteq \Lambda$, pro kterou by existoval term F splňující (*), neexistuje.

Varianta

$$\begin{array}{ll} \text{jestliže } M \in A, \text{ pak } FM = \ulcorner 0 \urcorner, & \\ \text{jestliže } M \notin A, \text{ pak } FM = \ulcorner 1 \urcorner & (**) \end{array}$$

dopadne stejně špatně, spor ukážeme pomocí termu

$$G \equiv \lambda x.\, \mathit{If}\,(\mathit{Zero}\,(Fx))\, M_1 M_0 .$$

Žádný term $F \in \Lambda$ tedy neurčuje (nerozhoduje) netriviální množinu (ať už pomocí (*), nebo (**)). Z důvodu (který vyplývá z předchozího), že vždy existuje M tak, že $FM \neq True$ a $FM \neq False$ (resp. $\ulcorner 0 \urcorner$ a $\ulcorner 1 \urcorner$ pro (**)).

Tuto potíž můžeme odstranit nějakým typem Gödelova číslování, tj. algoritmickým injektivním zobrazením $\# : \Lambda \to \mathbb{N}_0$.

Techniky, jak # zkonstruovat, jsou známé a pro nás nepodstatné. Jediné omezení (kromě injektivity) je, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ můžeme v konečném čase najít jeho vzor (tj. $M \in \Lambda$ takové, že $\#M = n$), nebo zjistit, že neexistuje.

Pak můžeme pomocí F určit množinu A takto:

$$\begin{aligned} &\text{jestliže } M \in A, \text{ pak } F\ulcorner \#M \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner, \\ &\text{jestliže } M \notin A, \text{ pak } F\ulcorner \#M \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner. \end{aligned} \qquad (***)$$

Množina A, pro kterou takové F existuje, se nazývá rekursivní.

~~[illegible]~~

Jiný, ekvivalentní pohled: existuje ~~rekursivní~~ totální rekursivní funkce $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\text{jestliže } M \in A, \text{ pak } \varphi(\#M) = 0, \\ &\text{jestliže } M \notin A, \text{ pak } \varphi(\#M) = 1. \end{aligned}$$

V číslech n, která nejsou Gödelovými čísly žádného λ-termu lze např. požadovat $\varphi(n) = 0$.

Pak můžeme zvolit F např. jako λ-term, který λ-definuje φ.

Pro množinu A nějaký term F (nebo, ekvivalentně, rekurzivní funkce φ) existuje, právě když je problém $M \overset{?}{\in} A$ rozhodnutelný. (Což je ekvivalentní tvrzení, že A je rekurzivní.)

<u>Příklad</u>. Definujte λ-term Eql takový, že

$$\mathsf{Eql}\ulcorner m \urcorner \ulcorner n \urcorner = \mathsf{True}, \text{ pokud } m = n$$
$$\text{a } \mathsf{Eql}\ulcorner m \urcorner \ulcorner n \urcorner = \mathsf{False}, \text{ pokud } m \neq n$$

pro libovolná čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Zvolme pevně term $K \in \Lambda$. Pak

$$F \equiv \lambda n. \mathsf{If}\,(\mathsf{Eql}\ulcorner \#K \urcorner n)\ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 1 \urcorner$$

určuje množinu $A = \{K\}$. Taková množina je tedy rekurzivní. Pomocí rekurzivní funkce: A je určena totožní rekurzivní funkcí $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$, kde

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } n = \#K \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Problém, zda je daný výraz totožný (syntakticky) s K, je tedy rozhodnutelný, což ovšem není nic zajímavého

Z pohledu λ-kalkulu jsou podstatné problémy, ve kterých vystupuje převoditelnost (tj. „$=$", nikoliv „$\equiv$").

Dále: ještě nevíme, jestli a jak se může projevit problém (paradox), který jsme si ukázali na začátku přednášky.

Zkusme tedy znovu položit

$$G \equiv \lambda x.\, \mathit{If}\,(\mathit{Zero}\,(F x))\, M_1 M_0 ,$$

kde $M_0 \in A$ a $M_1 \notin A$ (A tedy musí být netriviální).

Pokud by existoval „pevný bod druhého typu", neboli term M takový, že

$$G \ulcorner \# M \urcorner = M ,$$

pak máme opět problém, protože jestliže

$M \in A$, pak

$$M = G\ulcorner \# M \urcorner = \mathit{If}\,(\underbrace{\mathit{Zero}\,(F \ulcorner \# M \urcorner)}_{= \mathit{True}})\, M_1 M_0 = M_1$$

a jestliže $M \notin A$, pak

$$M = G\ulcorner \# M \urcorner = \mathit{If}\,(\underbrace{\mathit{Zero}\,(F \ulcorner \# M \urcorner)}_{= \mathit{False}})\, M_1 M_0 = M_0$$

Totiž pokud $M \in A$, pak $M = M_1$, kde $M_1 \notin A$ a pokud $M \notin A$, pak $M = M_0$, kde $M_0 \in A$. Problém tedy nastane, jestliže množina A je <u>uzavřená na rovnost</u>, což znamená, že pokud $K \in A$ a $K = L$, pak i $L \in A$.

K dokončení úvah je tedy třeba jen dokázat existenci pevného bodu druhého typu.

<u>Druhá věta o pevném bodě</u>. Pro každé $F \in \Lambda$ existuje $X \in \Lambda$ takové, že

$$F \ulcorner \# X \urcorner = X.$$

<u>Důkaz</u>. Jestliže $m = \# M$ a $n = \# N$, pak ~~existuje~~ lze v konečném čase (algoritmicky) nalézt číslo $\varphi(m, n) = \#(MN)$. Máme tedy (parciální) rekurzivní funkci φ. Označme $Ap \in \Lambda$ výraz, který ji λ-definuje. Máme

$$Ap \ulcorner \# M \urcorner \ulcorner \# N \urcorner = \ulcorner \#(MN) \urcorner .$$

Dále musí existovat rekurzivní funkce ψ taková, že $\psi(n) = \# \ulcorner n \urcorner$. Označme λ-definici této funkce Num. Je

$$Num \ulcorner n \urcorner = \ulcorner \#(\ulcorner n \urcorner) \urcorner .$$

Teď položme $W \equiv \lambda x. F(\mathrm{Ap}\, x\, (\mathrm{Num}\, x))$

$$X \equiv W \ulcorner \# W \urcorner .$$

Podobně jako v důkazu (první) věty o pevném bodě se teď dokáže, že $X = F \ulcorner \# X \urcorner$.

C.B.D.

Celkově jsme tedy dokázali:

<u>Teorém</u>. Žádná netriviální podmnožina $A \subseteq \Lambda$, která je uzavřená na rovnost, není rekurzivní.

(neexistuje tedy program, který by pro libovolné M v konečném čase vyřešil problém $M \overset{?}{\in} A$.)

Příklady takových množin:

$$A_1 = \{ M \mid M = I \}$$

$$A_2 = \{ M \mid M \text{ má nf} \}$$

$$A_3 = \{ M \mid M \text{ má hlavovou nf} \}$$

Všechny tyto množiny jsou ovšem <u>rekurzivně vyčíslitelné</u> (problém $M \overset{?}{\in} A$ je částečně rozhodnutelný). Množina A_2 je historicky první, o které to bylo dokázáno (Church). (tj. že je rek. vyč., ale není rek.)