

Paradigmata programování 1  
**Přednáška 4. Rekurze 2**

Michal Krupka

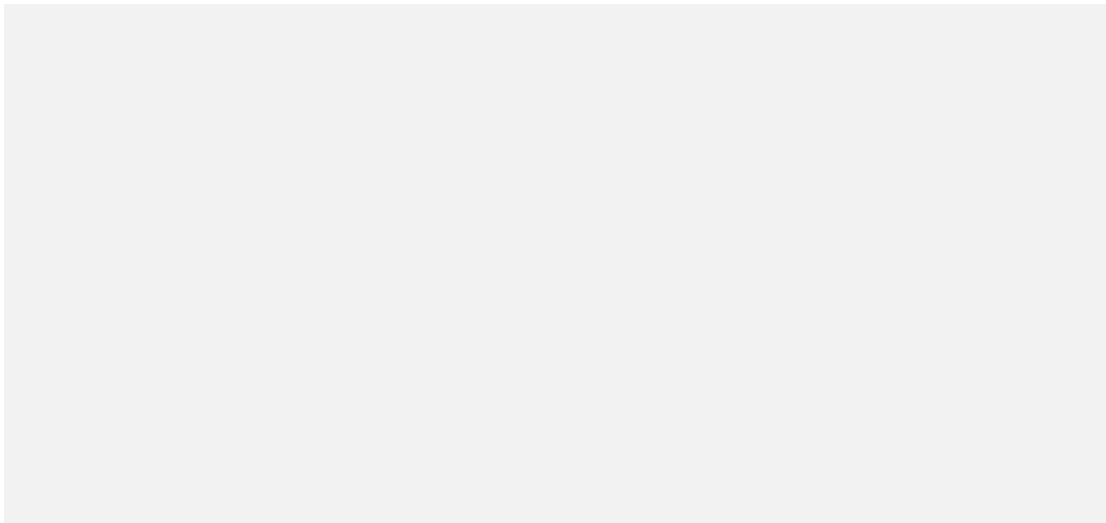


KATEDRA INFORMATIKY  
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI



1 Jak probíhá rekurzivní výpočet

2 Stromově rekurzivní výpočetní proces





```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```



```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```



```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

```
(define (power4 a)
  (if (= 4 0)
      1
      (* a (power3 a))))
```





```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

```
(define (power4 a)
  (if (= 4 0)
      1
      (* a (power3 a))))
```

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

# Procedury power $n$

aplikace (power4 10)

vyvolá aplikaci (power3 10)

aplikace (power3 10)

vyvolá aplikaci (power2 10)

aplikace (power2 10)

vyvolá aplikaci (power1 10)

aplikace (power1 10)

vyvolá aplikaci (power0 10)

aplikace (power0 10)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power4

```
(define (power4 a)
  (if (= 4 0)
      1
      (* a (power3 a))))
```

# Procedury power*n*

aplikace (power4 10)

vyvolá aplikaci (power3 10)

aplikace (power3 10)

vyvolá aplikaci (power2 10)

aplikace (power2 10)

vyvolá aplikaci (power1 10)

aplikace (power1 10)

vyvolá aplikaci (power0 10)

aplikace (power0 10)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power4

```
(define (power4 a)
  (if (= 4 0)
      1
      (* a (power3 a))))
```

Začátek aplikace

# Procedury power*n*



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
        aplikace (power0 10)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power3

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

Začátek aplikace

# Procedury power*n*



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
      aplikace (power0 10)  
      vrátí 1  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
    vrátí 10  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
  vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
  vrátí 10000

## Procedura power3

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

Začátek aplikace

# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    **aplikace (power2 10)**  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
      aplikace (power0 10)  
      vrátí 1  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
    vrátí 10  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
  vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power2

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

Začátek aplikace

# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
      aplikace (power0 10)  
      vrátí 1  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
    vrátí 10  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
  vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power2

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

Začátek aplikace

# Procedury power*n*



```
aplikace (power4 10)
vyvolá aplikaci (power3 10)
  aplikace (power3 10)
    vyvolá aplikaci (power2 10)
      aplikace (power2 10)
        vyvolá aplikaci (power1 10)
          aplikace (power1 10)
            vyvolá aplikaci (power0 10)
              aplikace (power0 10)
                vrátí 1
            pak vyvolá aplikaci (* 10 1)
              vrátí 10
          pak vyvolá aplikaci (* 10 10)
            vrátí 100
        pak vyvolá aplikaci (* 10 100)
          vrátí 1000
      pak vyvolá aplikaci (* 10 1000)
        vrátí 10000
```

## Procedura power1

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

Začátek aplikace



# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
    aplikace (power3 10)  
        vyvolá aplikaci (power2 10)  
            aplikace (power2 10)  
                vyvolá aplikaci (power1 10)  
                    aplikace (power1 10)  
                        vyvolá aplikaci (power0 10)  
                            aplikace (power0 10)  
                                vrátí 1  
                            pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
                                vrátí 10  
                        pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
                            vrátí 100  
                pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
                    vrátí 1000  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
            vrátí 10000

## Procedura power1

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

Začátek aplikace

# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
        **aplikace (power0 10)**  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power0

```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

## Začátek aplikace

# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
    aplikace (power3 10)  
        vyvolá aplikaci (power2 10)  
            aplikace (power2 10)  
                vyvolá aplikaci (power1 10)  
                    aplikace (power1 10)  
                        vyvolá aplikaci (power0 10)  
                            **aplikace (power0 10)**  
                                **vrátí 1**  
                            pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
                                vrátí 10  
                        pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
                            vrátí 100  
                pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
                    vrátí 1000  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
            vrátí 10000

## Procedura power0

```
(define (power0 a)
  (if (= 0 0)
      1
      (* a (powerx a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power*n*



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
        aplikace (power0 10)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power1

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power*n*



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
 aplikace (power3 10)  
 vyvolá aplikaci (power2 10)  
 aplikace (power2 10)  
 vyvolá aplikaci (power1 10)  
 aplikace (power1 10)  
 vyvolá aplikaci (power0 10)  
 aplikace (power0 10)  
 vrátí 1  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
 vrátí 10  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
 vrátí 100  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
 vrátí 1000  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
 vrátí 10000

## Procedura power1

```
(define (power1 a)
  (if (= 1 0)
      1
      (* a (power0 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
    aplikace (power3 10)  
    vyvolá aplikaci (power2 10)  
        aplikace (power2 10)  
        vyvolá aplikaci (power1 10)  
            aplikace (power1 10)  
            vyvolá aplikaci (power0 10)  
                aplikace (power0 10)  
                vrátí 1  
            pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
                vrátí 10  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
            vrátí 100  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
        vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power2

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power $n$



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
    aplikace (power3 10)  
        vyvolá aplikaci (power2 10)  
            aplikace (power2 10)  
                vyvolá aplikaci (power1 10)  
                    aplikace (power1 10)  
                        vyvolá aplikaci (power0 10)  
                            aplikace (power0 10)  
                                vrátí 1  
                    pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
                        vrátí 10  
                pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
                    vrátí 100  
            pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
                vrátí 1000  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
            vrátí 10000

## Procedura power2

```
(define (power2 a)
  (if (= 2 0)
      1
      (* a (power1 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power*n*



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
        aplikace (power0 10)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power3

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)



# Procedury power*n*



aplikace (power4 10)  
vyvolá aplikaci (power3 10)  
  aplikace (power3 10)  
  vyvolá aplikaci (power2 10)  
    aplikace (power2 10)  
    vyvolá aplikaci (power1 10)  
      aplikace (power1 10)  
      vyvolá aplikaci (power0 10)  
        aplikace (power0 10)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power3

```
(define (power3 a)
  (if (= 3 0)
      1
      (* a (power2 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power*n*

aplikace (power4 10)

vyvolá aplikaci (power3 10)

aplikace (power3 10)

vyvolá aplikaci (power2 10)

aplikace (power2 10)

vyvolá aplikaci (power1 10)

aplikace (power1 10)

vyvolá aplikaci (power0 10)

aplikace (power0 10)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power4

```
(define (power4 a)
  (if (= 4 0)
      1
      (* a (power3 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedury power*n*

aplikace (power4 10)

vyvolá aplikaci (power3 10)

aplikace (power3 10)

vyvolá aplikaci (power2 10)

aplikace (power2 10)

vyvolá aplikaci (power1 10)

aplikace (power1 10)

vyvolá aplikaci (power0 10)

aplikace (power0 10)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power4

```
(define (power4 a)
  (if (= 4 0)
      1
      (* a (power3 a))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)



# Procedura power

aplikace (power 10 4)

vyvolá aplikaci (power 10 3)

aplikace (power 10 3)

vyvolá aplikaci (power 10 2)

aplikace (power 10 2)

vyvolá aplikaci (power 10 1)

aplikace (power 10 1)

vyvolá aplikaci (power 10 0)

aplikace (power 10 0)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

# Procedura power

aplikace (power 10 4)

vyvolá aplikaci (power 10 3)

aplikace (power 10 3)

vyvolá aplikaci (power 10 2)

aplikace (power 10 2)

vyvolá aplikaci (power 10 1)

aplikace (power 10 1)

vyvolá aplikaci (power 10 0)

aplikace (power 10 0)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace



# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      **aplikace (power 10 1)**  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
      aplikace (power 10 0)  
      vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
      vrátí 100  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
      vrátí 1000  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
      vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
        vrátí 10  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
        vrátí 100  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
        vrátí 1000  
        pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
        vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        **aplikace (power 10 0)**  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedura power



aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)



# Procedura power



aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
 aplikace (power 10 3)  
 vyvolá aplikaci (power 10 2)  
 aplikace (power 10 2)  
 vyvolá aplikaci (power 10 1)  
 aplikace (power 10 1)  
 vyvolá aplikaci (power 10 0)  
 aplikace (power 10 0)  
 vrátí 1  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
 vrátí 10  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
 vrátí 100  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
 vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedura power



aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
 aplikace (power 10 3)  
 vyvolá aplikaci (power 10 2)  
 aplikace (power 10 2)  
 vyvolá aplikaci (power 10 1)  
 aplikace (power 10 1)  
 vyvolá aplikaci (power 10 0)  
 aplikace (power 10 0)  
 vrátí 1  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
 vrátí 10  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
 vrátí 100  
 pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
 vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedura power



aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000

## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedura power

aplikace (power 10 4)  
vyvolá aplikaci (power 10 3)  
  aplikace (power 10 3)  
  vyvolá aplikaci (power 10 2)  
    aplikace (power 10 2)  
    vyvolá aplikaci (power 10 1)  
      aplikace (power 10 1)  
      vyvolá aplikaci (power 10 0)  
        aplikace (power 10 0)  
        vrátí 1  
      pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)  
      vrátí 10  
    pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)  
    vrátí 100  
  pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)  
  vrátí 1000  
pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)  
vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

# Procedura power

aplikace (power 10 4)

vyvolá aplikaci (power 10 3)

aplikace (power 10 3)

vyvolá aplikaci (power 10 2)

aplikace (power 10 2)

vyvolá aplikaci (power 10 1)

aplikace (power 10 1)

vyvolá aplikaci (power 10 0)

aplikace (power 10 0)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)

## Procedura power

aplikace (power 10 4)

vyvolá aplikaci (power 10 3)

aplikace (power 10 3)

vyvolá aplikaci (power 10 2)

aplikace (power 10 2)

vyvolá aplikaci (power 10 1)

aplikace (power 10 1)

vyvolá aplikaci (power 10 0)

aplikace (power 10 0)

vrátí 1

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1)

vrátí 10

pak vyvolá aplikaci (\* 10 10)

vrátí 100

pak vyvolá aplikaci (\* 10 100)

vrátí 1000

pak vyvolá aplikaci (\* 10 1000)

vrátí 10000



## Procedura power

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

Začátek aplikace

Konec aplikace (vrácená hodnota)



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```



## Počáteční prostředí

```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí



# Prostředí při aplikaci (power 10 4)



1. aplikace

a	10
n	4

Počáteční prostředí



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí

# Prostředí při aplikaci (power 10 4)



1. aplikace

a	10
n	4

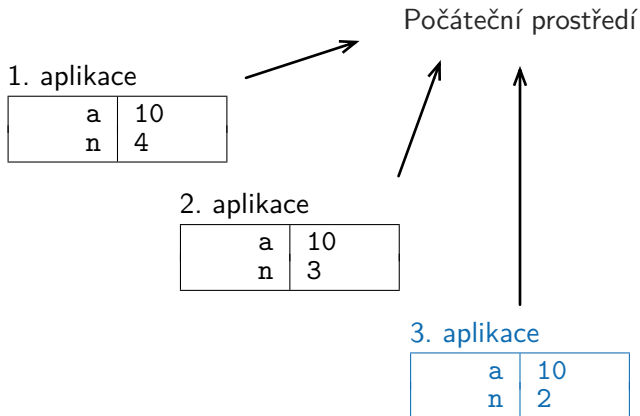
2. aplikace

a	10
n	3

Počáteční prostředí

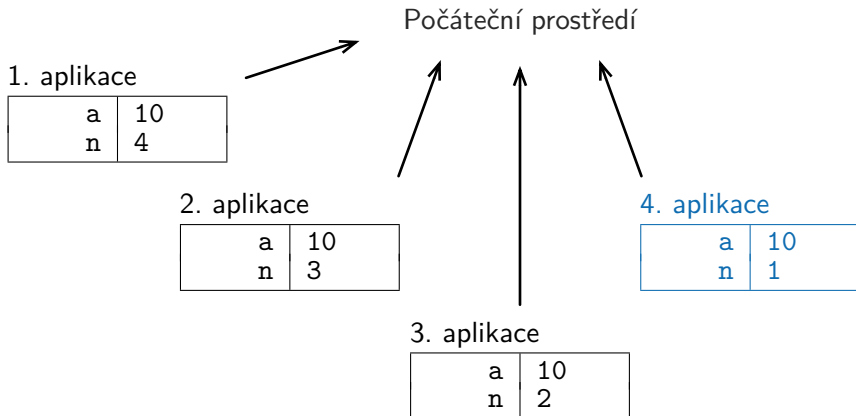
```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



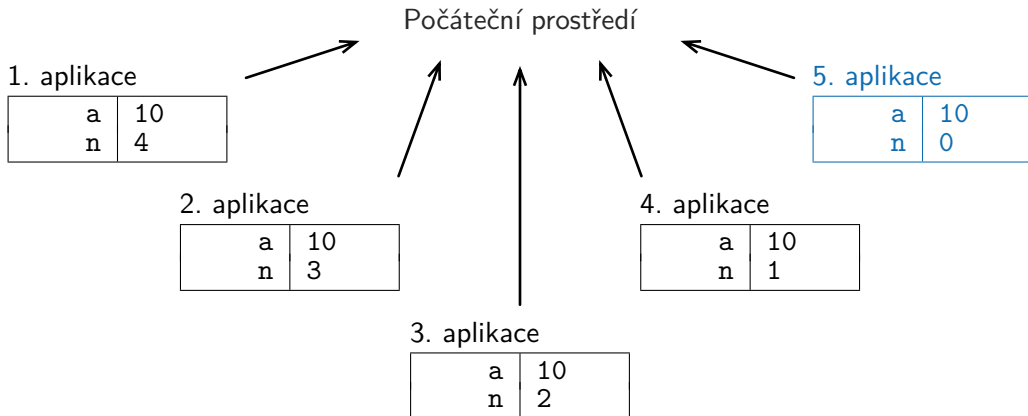
```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

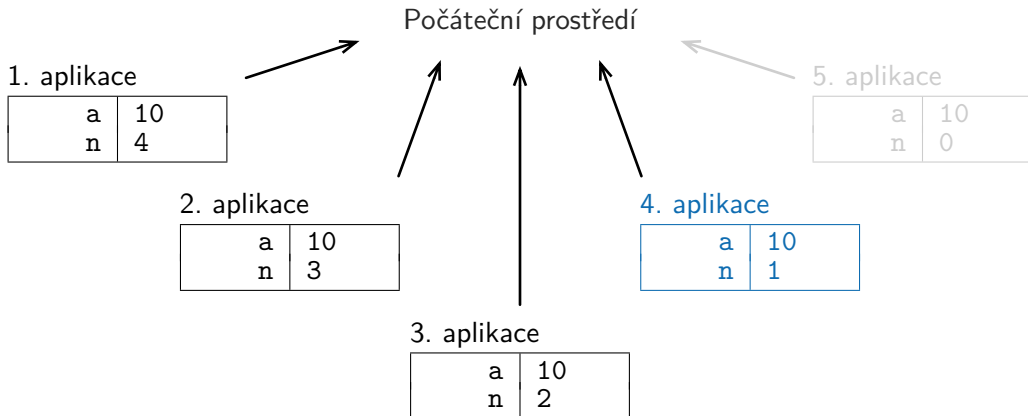
aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

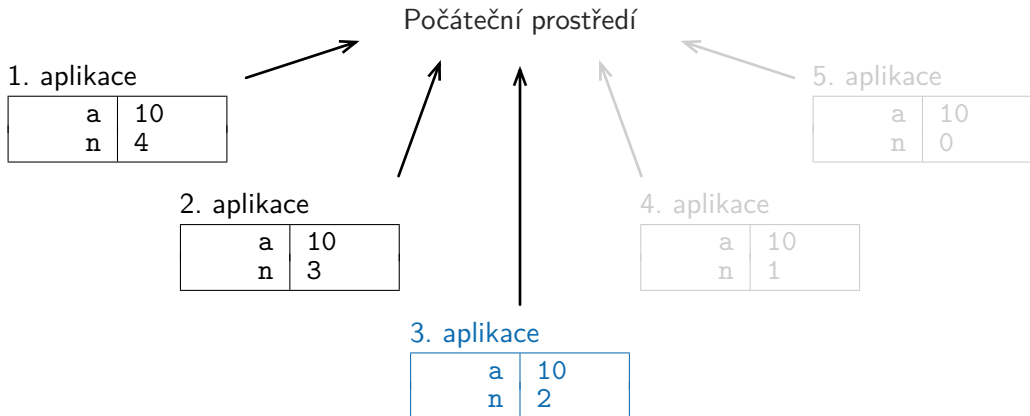
aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba

# Prostředí při aplikaci (power 10 4)



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

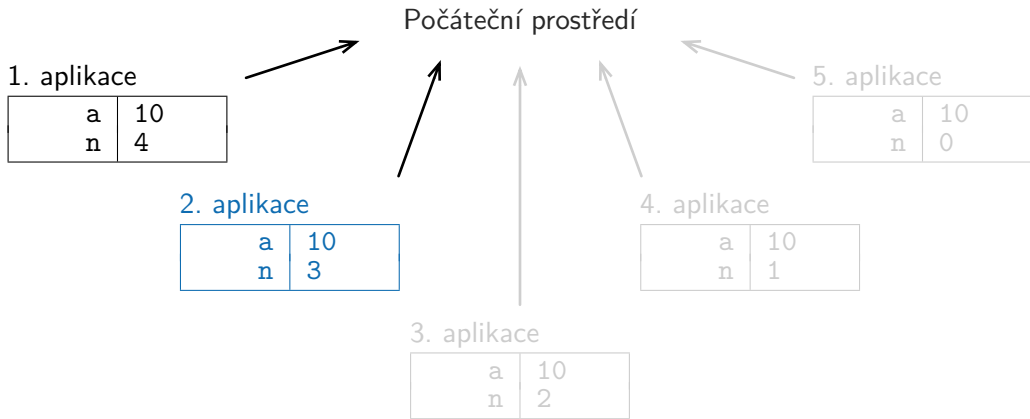
aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba

# Prostředí při aplikaci (power 10 4)

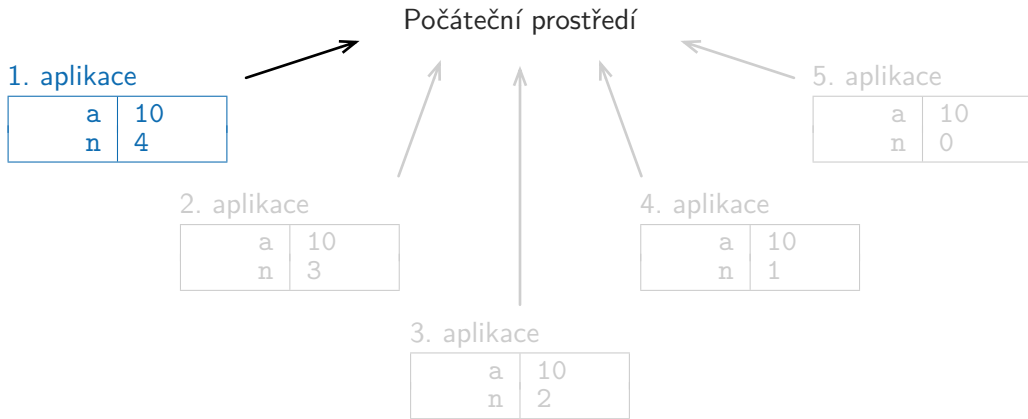


```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



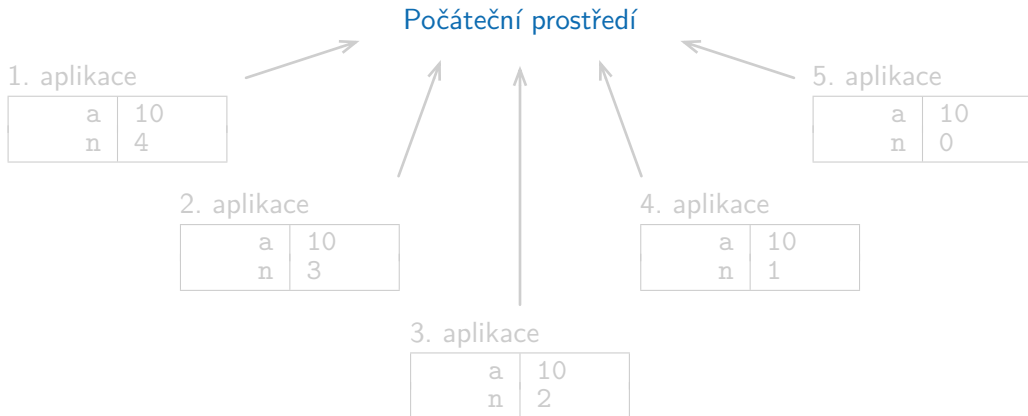
# Prostředí při aplikaci (power 10 4)



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba

# Prostředí při aplikaci (power 10 4)



```
(define (power a n)
  (if (= n 0)
      1
      (* a (power a (- n 1)))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))

(define (power a n)
  (power-iter a n 1))
```



```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```



## Počáteční prostředí

```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí

# Prostředí při aplikaci (power-iter 10 4 1)



1. aplikace

a	10
n	4
ir	1



Počáteční prostředí

```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí

# Prostředí při aplikaci (power-iter 10 4 1)



1. aplikace

a	10
n	4
ir	1

2. aplikace

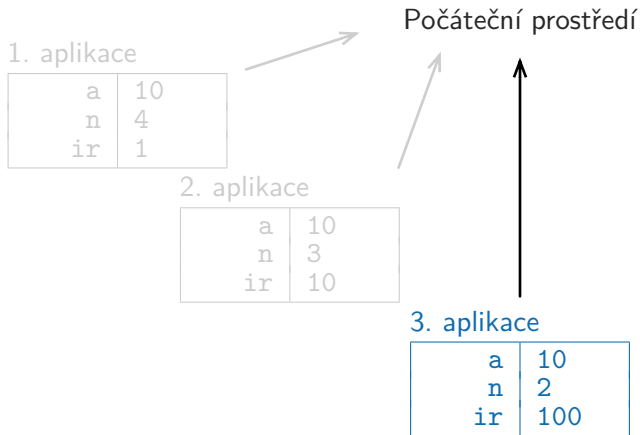
a	10
n	3
ir	10

Počáteční prostředí

```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba

# Prostředí při aplikaci (power-iter 10 4 1)

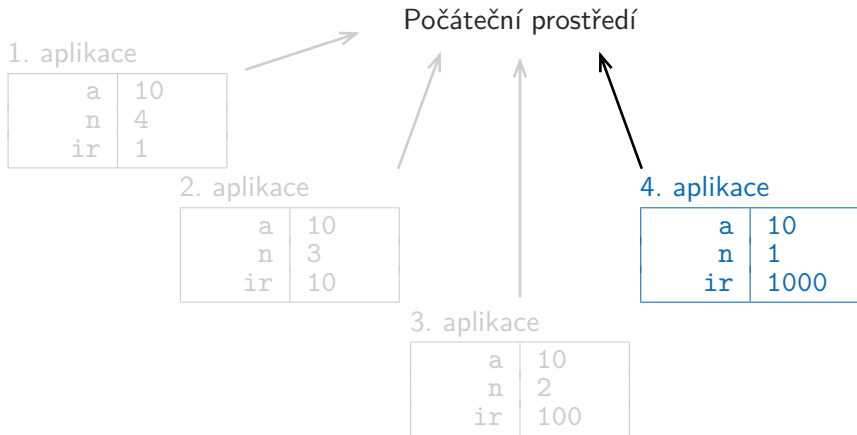


```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



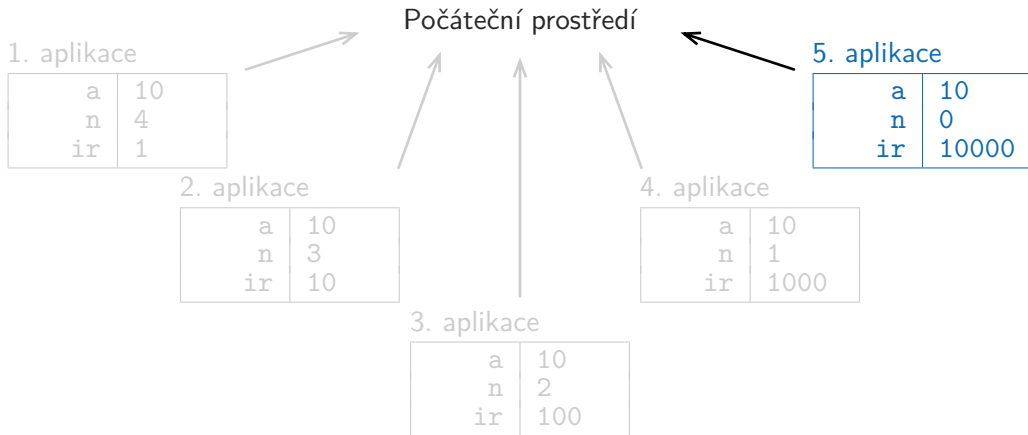
# Prostředí při aplikaci (power-iter 10 4 1)



```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba

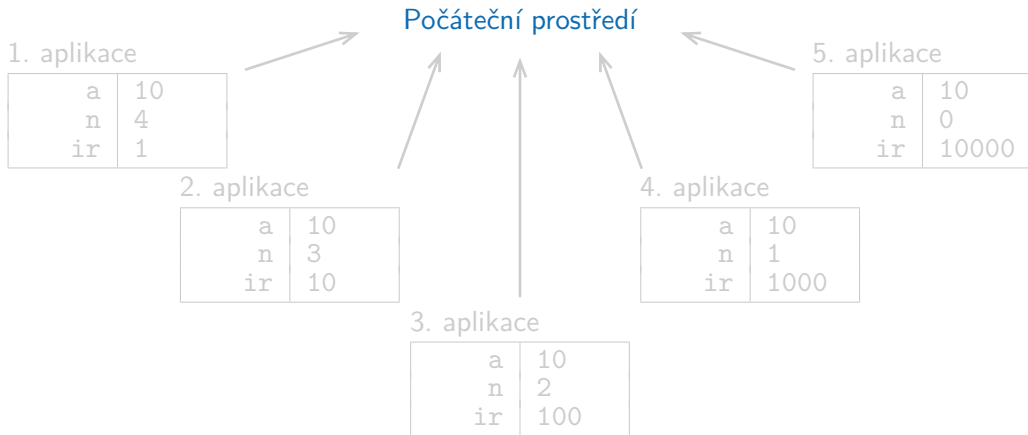
# Prostředí při aplikaci (power-iter 10 4 1)



```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba

# Prostředí při aplikaci (power-iter 10 4 1)



```
(define (power-iter a n ir)
  (if (= n 0)
      ir
      (power-iter a (- n 1) (* a ir))))
```

aktuální prostředí  
prostředí už nebude nikdy potřeba



# Zrychlení výpočtu mocniny

Výpočet  $a^9$  rekurzivně



# Zrychlení výpočtu mocniny

Výpočet  $a^9$  rekurzivně

*aaaaaaaaaa*



# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$



# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$



# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5))$

$a \cdot (a \cdot a^6)$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$



# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$



# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5))$

$a \cdot (a \cdot a^6)$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5))$

$a \cdot (a \cdot a^6)$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

$a \cdot ((aa)^2)^2$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

$a \cdot ((aa)^2)^2$

$a \cdot ((a \cdot a)^2)^2$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

$a \cdot ((aa)^2)^2$

$a \cdot ((a \cdot a)^2)^2$

$a \cdot ((a^2)^2)^2$



# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5))$

$a \cdot (a \cdot a^6)$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

$a \cdot ((aa)^2)^2$

$a \cdot ((a \cdot a)^2)^2$

$a \cdot ((a^2)^2)^2$

$a \cdot (a^4)^2$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

$a \cdot ((aa)^2)^2$

$a \cdot ((a \cdot a)^2)^2$

$a \cdot ((a^2)^2)^2$

$a \cdot (a^4)^2$

$a \cdot a^8$

# Zrychlení výpočtu mocniny



Výpočet  $a^9$  rekurzivně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaaaa)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaaaa))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaaaa)))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aaa))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (aa)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a))))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^2)))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^3))))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^4))))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot (a \cdot a^5)))$

$a \cdot (a \cdot (a \cdot a^6))$

$a \cdot (a \cdot a^7)$

$a \cdot a^8$

$a^9$

Iterativně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^2 \cdot (aaaaaaaaa)$

$a^3 \cdot (aaaaaaa)$

$a^4 \cdot (aaaaa)$

$a^5 \cdot (aaaa)$

$a^6 \cdot (aaa)$

$a^7 \cdot (aa)$

$a^8 \cdot a$

$a^9$

Zrychleně

$aaaaaaaaa$

$a \cdot (aaaaaaaaa)$

$a \cdot (aaaa)^2$

$a \cdot ((aa)^2)^2$

$a \cdot ((a \cdot a)^2)^2$

$a \cdot ((a^2)^2)^2$

$a \cdot (a^4)^2$

$a \cdot a^8$

$a^9$



```
(define (power2 a)
  (* a a))

(define (fast-power a n)
  (cond ((= n 0) 1)
        ((even? n) (power2 (fast-power a (/ n 2))))
        (#true (* a (fast-power a (- n 1)))))
```

Počet násobení při výpočtu  $a^n$ :  
(násobení jedničkou nepočítáme)

rekurzivně:  $n - 1$

iterativně:  $n - 1$

zrychleně:  $\lceil \log_2 n \rceil$

( $\lceil x \rceil$  je číslo  $x$  zaokrouhlené nahoru.  
Ve Scheme na to máme proceduru  
`ceiling`)

Počet násobení při výpočtu  $a^n$ :  
(násobení jedničkou nepočítáme)

rekurzivně:  $n - 1$

iterativně:  $n - 1$

zrychleně:  $\lceil \log_2 n \rceil$

( $\lceil x \rceil$  je číslo  $x$  zaokrouhlené nahoru.

Ve Scheme na to máme proceduru  
ceiling)

$n$	$n - 1$	$\lceil \log_2 n \rceil$
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	2
5	4	3
6	5	3
7	6	3
8	7	3
100	99	7
1000	999	10
10000	9999	14



1 Jak probíhá rekurzivní výpočet

2 Stromově rekurzivní výpočetní proces







## Definition (lineárně rekurzivní výpočetní proces)

Výpočetní proces je *lineárně rekurzivní*, když během aplikace procedury dojde nejvýše jednou k přímé aplikaci téže procedury.



## Definition (lineárně rekurzivní výpočetní proces)

Výpočetní proces je *lineárně rekurzivní*, když během aplikace procedury dojde nejvýše jednou k přímé aplikaci téže procedury.

- dosud uvedené rekurzivní procedury generovaly lineárně rekurzivní výpočetní proces



## Definition (lineárně rekurzivní výpočetní proces)

Výpočetní proces je *lineárně rekurzivní*, když během aplikace procedury dojde nejvýše jednou k přímé aplikaci téže procedury.

- dosud uvedené rekurzivní procedury generovaly lineárně rekurzivní výpočetní proces

## Definition (stromově rekurzivní výpočetní proces)

Výpočetní proces je *stromově rekurzivní*, když během aplikace procedury dojde k více přímým aplikacím téže procedury.



# Fibonacciho posloupnost



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (#true (+ (fib (- n 2)) (fib (- n 1))))))
```







```
(define (count-change amount)
  (cc amount 6))
```



```
(define (count-change amount)
  (cc amount 6))

(define (cc amount kinds-of-coins)
  (cond ((= amount 0) 1)
        ((or (< amount 0) (= kinds-of-coins 0)) 0)
        (#true (+ (cc amount (- kinds-of-coins 1))
                  (cc (- amount (first-denom kinds-of-coins))
                      kinds-of-coins)))))
```

```
(define (count-change amount)
  (cc amount 6))

(define (cc amount kinds-of-coins)
  (cond ((= amount 0) 1)
        ((or (< amount 0) (= kinds-of-coins 0)) 0)
        (#true (+ (cc amount (- kinds-of-coins 1))
                  (cc (- amount (first-denom kinds-of-coins))
                      kinds-of-coins)))))

(define (first-denom kinds-of-coins)
  (cond ((= kinds-of-coins 1) 1)
        ((= kinds-of-coins 2) 2)
        ((= kinds-of-coins 3) 5)
        ((= kinds-of-coins 4) 10)
        ((= kinds-of-coins 5) 20)
        ((= kinds-of-coins 6) 50)))
```