Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Geometrie pro informatiky

Učební text

Michal Krupka

Olomouc, 25. března 2025

Úvod z roku 2018

V roce 1984 uvedla firma Apple Computer na trh počítač Macintosh, který přinesl revoluci v grafice na osobních počítačích. Už v první verzi programátorské dokumentace k Macintoshům (Inside Macintosh I, II, III, Addison-Wesley, 1985), se v části věnované grafice dočteme toto:

> To create graphics that are both precise and pretty requires not supercharged features but a firm mathematical foundation for the features you have. If the mathematics that underlie a graphics package are imprecise or fuzzy, the graphics will be, too.

Macintoshe byly po mnoho let od svého uvedení nejpoužívanější platformou pro profesionální práci v počítačové grafice.

Má osobní zkušenost výše uvedený citát potvrzuje. Po roce 2000 jsem několik let programoval grafický software v knihovně (Win32 API), která neměla, co se týče grafiky, přesně specifikované matematické základy (byly „imprecise“ a „fuzzy“). Získat v ní přesný a pěkný výsledek („precise and pretty“) bylo proto obtížné a nezřídka v podstatě nemožné.

Moderní počítačová grafika používaná na osobních počítačích dnes je mnohem složitější než tehdy. Složitější jsou i její matematické základy; uvedené poučení ovšem stále platí.

Tento učební text se věnuje základním poznatkům z oblasti geometrie, na kterých stojí moderní počítačová grafika. Obsah se snažím podávat úplně (většina tvrzení je dokázána), matematicky korektně a přesně, a současně čtivě. Doplňuji jej mnoha ilustrativními příklady, které by měly zvýšit srozumitelnost a usnadnit pochopení. Mnohé z nich jsou orientovány na počítačovou grafiku. Závěr jednotlivých kapitol obsahuje úlohy k řešení. Ty jsou koncipovány s hlavním cílem pomoci čtenáři v pochopení teorie a při jejím použití v reálných situacích.

Text je určen především studentům bakalářského studijního programu informatiky a příbuzných oborů. Hlavním cílem je, aby čtenář pochopil principy; tak bude schopen řešit i netriviální problémy, na něž programátor, který je pouhým uživatelem grafických knihoven, nestačí. Pro studenty matematických disciplín mohou být užitečné ukázané aplikace.

Text vznikl podstatným přepracováním a doplněním učebního textu z roku 2008 za podpory projektu FRUP_2017_052. Bude jistě i nadále vylepšován. Uvítám veškeré připomínky a náměty.

Olomouc, leden 2018 Michal Krupka

Obsah

Úvod **3**

Obsah **5**

1 Vektorové prostory **9**
1.1 Vektorový prostor 9
1.2 Podprostory a součiny 10
1.3 Báze a souřadnice 11
1.4 Lineární zobrazení a jejich matice 13
ÚLOHY 14

2 Afinní prostory **17**
2.1 Afinní prostory 17
2.2 Základní vlastnosti afinní struktury 19
ÚLOHY 21

3 Afinní podprostory **23**
3.1 Afinní kombinace a afinní obal 23
3.2 Afinní podprostory 27
ÚLOHY 29

4 Souřadnicové systémy **31**
4.1 Afinní báze a souřadnice 31
4.2 Matice přechodu mezi afinními bazemi 34
4.3 Body v obecné poloze 37
4.4 Bodové báze a barycentrické souřadnice 40
ÚLOHY 41

5 Afinní zobrazení **45**
5.1 Definice a příklady afinních zobrazení 45
5.2 Podřízené lineární zobrazení 48

ÚLOHY . . . 52

6 Vlastnosti afinních zobrazení **55**
6.1 Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím . . . 55
6.2 Matice afinního zobrazení a matice přechodu . . . 57
6.3 Obecná rovnice afinního podprostoru . . . 58
ÚLOHY . . . 58

7 Vzájemná poloha afinních podprostorů **63**
7.1 Rovnoběžnost, různoběžnost, mimoběžnost . . . 63
7.2 Příčka mimoběžek . . . 68
ÚLOHY . . . 72

8 Konvexnost **73**
8.1 Konvexní kombinace a konvexní množiny . . . 73
8.2 Mnohostěny, polytopy, poloprostory . . . 75
ÚLOHY . . . 76

9 Orientace **79**
9.1 Orientace afinních prostorů . . . 79
9.2 Orientace na podmnožinách . . . 81
9.3 Orientovaná afinní zobrazení . . . 83
ÚLOHY . . . 84

10 Vektorové prostory se skalárním součinem **85**
10.1 Skalární součin . . . 85
10.2 Délka a odchylka . . . 86
10.3 Ortonormální báze . . . 90
10.4 Vektorový součin . . . 92
10.5 Izometrie . . . 95
ÚLOHY . . . 96

11 Eukleidovské prostory **99**
11.1 Základní vlastnosti eukleidovských prostorů . . . 99
11.2 Shodnost a podobnost . . . 101
11.3 Obecná rovnice pomocí skalárního součinu . . . 102
ÚLOHY . . . 104

12 Projektivní prostory **105**
12.1 Perspektivní promítání v příkladech . . . 105
12.2 Afinní nadrovina ve vektorovém prostoru . . . 110
12.3 Projektivní prostory a podprostory . . . 112

12.4 Projektivní rozšíření afinního prostoru 114

13 Projektivní zobrazení **117**
13.1 Projektivní zobrazení 119

14 Křivky v eukleidovských prostorech **123**
14.1 Limita a spojitost bodové funkce 123
14.2 Derivace bodové funkce 124
14.3 Křivky a parametrizace 126
14.4 Délka křivky 129
14.5 Křivost 130
ÚLOHY 130

Literatura **131**

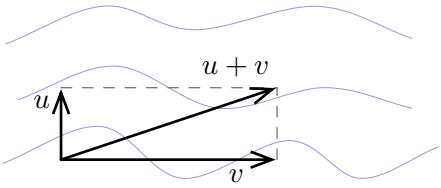
Kapitola 1

Vektorové prostory

Pro pochopení textu je třeba, aby student rozuměl základům lineární algebry. Ty stručně připomeneme v této kapitole.

1.1 Vektorový prostor

S vektory se setkáváme ve fyzice i matematice (v informatice vektorem obvykle rozumíme něco jiného). Důležité fyzikální vektory jsou například vektor rychlosti, zrychlení, síly. Na nich lze dobře pochopit základní vlastnosti vektorů, které jsou pak vtěleny do jejich matematické definice. Pokud se například snažím přeplavat řeku rychlostí u (u je vektor; jistě záleží na směru, kterým plavu) a samotná řeka teče rychlostí v (opět vektor), bude má výsledná rychlost rovna součtu $u+v$ (obr. 1.1).



Obrázek 1.1: u: rychlost plavce ve stojaté vodě, v: rychlost proudu vody, $u+v$: skutečná rychlost plavce.

V matematice se vektory (kromě lineární algebry) používají v mnoha oblastech, například v geometrii. Matematická definice vektoru zavádí abstraktní pojem, který je tvořen některými vlastnostmi vektorů převzatými z reality. Které vlastnosti to jsou, je věcí volby. V základní definici, jak se v matematice ujala, se například nehovoří o délce vektoru a úhlu (odchylce) mezi dvěma vektory.

Řekneme, že na množině U je dána *struktura vektorového prostoru* (nad polem reálných čísel; jiné typy vektorových prostorů zde neuvažujeme), je-li na ní dána binární operace $+$ a zobrazení $\cdot_U : \mathrm{R} \times U \to U$ tak, že U spolu s operací $+$ je komutativní grupa a zobrazení $\cdot_U$ splňuje pro každé $r,s \in \mathrm{R}$ a $u,v \in U$

$$1 \cdot_U u = u, \tag{1.1}$$
$$r \cdot_U (s \cdot_U u) = (rs) \cdot_U u, \tag{1.2}$$
$$(r+s) \cdot_U u = r \cdot_U u + s \cdot_U u, \tag{1.3}$$
$$r \cdot_U (u+v) = r \cdot_U u) + r \cdot_U v. \tag{1.4}$$

Množina U spolu se strukturou vektorového prostoru se nazývá *vektorový prostor*. Prvkům vektorového prostoru říkáme *vektory*, reálným číslům, pokud je používáme jako argumenty zobrazení $\cdot_U$, *skaláry*. Operace $+$ na U se nazývá *sčítání vektorů*, její neutrální prvek se nazývá *nulový vektor* a označuje 0. Zobrazení $\cdot_U$ nazýváme *násobení vektoru skalárem*. Jeho hodnoty obvykle značíme takto: $r \cdot_U u = r \cdot u = ru$. Podmínky (1.1)–(1.4) tedy můžeme přepsat takto:

$$1 \cdot u = u, \tag{1.1'}$$
$$r(su) = (rs)u, \tag{1.2'}$$
$$(r+s)u = ru + su, \tag{1.3'}$$
$$r(u+v) = ru + rv. \tag{1.4'}$$

Příklad 1.1. Základním příkladem vektorového prostoru je množina R^n, tedy množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel se sčítáním vektorů a násobením skalárem daným obvyklým způsobem po složkách. Tato struktura vektorového prostoru na R^n se nazývá *kanonická*. Pokud neřekneme jinak (a to kromě úloh k této kapitole nikdy neřekneme), uvažujeme množinu R^n vždy automaticky s kanonickou strukturou vektorového prostoru. Proto můžeme o R^n mluvit jako o vektorovém prostoru a říkat „vektorový prostor R^n“, aniž bychom specifikovali, jakou strukturu vektorového prostoru máme na mysli.

Příklad 1.2. Je ovšem nutné pochopit, že nejen R^n je vektorový prostor. Například fyzikální vektory jistě nejsou n-ticemi reálných čísel (a neexistuje jednoznačný způsob, jak jim n-tice reálných čísel přiřadit!).

Příklad 1.3. Označme P_n množinu všech polynomů stupně nejvýše n. Sčítání polynomů a násobení polynomů číslem definuje na množině P_n strukturu vektorového prostoru. (Používá se například v šifrování.)

1.2 Podprostory a součiny

Lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_k \in U$ s koeficienty $r^1, \ldots, r^k$ je vektor $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k$. O vektorech $u_1, \ldots, u_k$ říkáme, že jsou *lineárně závislé*, pokud existují koeficienty $r^1, \ldots, r^k \in \mathrm{R}$, z nichž alespoň jeden není nulový, tak, že příslušná lineární kombinace je nulový vektor.

Pokud bychom nepožadovali, aby alespoň jeden koeficient byl nenulový, existovaly by takové koeficienty vždy, protože ať jsou vektory $u_1,\dots,u_k$ jakékoli, vždy platí $0\cdot u_1+\cdots+0\cdot u_k=0$.

Vektory $u_1,\dots,u_k$ se nazývají *lineárně nezávislé*, pokud nejsou lineárně závislé. Tuto podmínku lze zformulovat i takto: pokud je lineární kombinace vektorů $u_1,\dots,u_k$ nulová, jsou všechny její koeficienty nulové. Neboli: z $r^1u_1+\cdots+r^ku_k=0$ plyne $r^1=\cdots=r^k=0$. Tato podmínka se dobře prakticky ověřuje.

Jsou-li vektory $u_1,\dots,u_k$ lineárně nezávislé, pak pro každý vektor $v\in U$ existuje nejvýše jedna k-tice čísel $(r^1,\dots,r^k)$ taková, že $r^1u_1+\cdots+r^ku_k=v$. To lze zformulovat i takto: rovnice $r^1u_1+\cdots+r^ku_k=v$ (kde neznámé jsou čísla $r^1,\dots,r^k$) má nejvýše jedno řešení.

V definici lineární nezávislosti jsme to požadovali jen pro $v=0$.

Lineárním obalem množiny $K\subseteq U$ rozumíme množinu všech lineárních kombinací všech konečných n-tic vektorů z K pro všechna přirozená čísla n. Lineární obal množiny K značíme $\langle K\rangle$. Pokud je množina K konečná, $K=\{u_1,\dots,u_k\}$, značíme jej také $\langle u_1,\dots,u_k\rangle$. Říkáme, že množina K *generuje* vektorový prostor U, pokud $\langle K\rangle=U$.

Pokud množina $\{u_1,\dots,u_k\}$ generuje vektorový prostor U, má pro libovolné $v\in U$ rovnice $r^1u_1+\cdots+r^ku_k=v$ vždy alespoň jedno řešení.

To není žádný hluboký poznatek, jen přeformulování definice.

Mějme neprázdnou podmnožinu V vektorového prostoru U splňující $\langle V\rangle=V$. Jinými slovy, pro libovolných k vektorů $v_1,\dots,v_k\in V$ a libovolných k čísel $r^1,\dots,r^k\in\mathrm{R}$ vždy platí $r^1v_1+\cdots+r^kv_k\in V$. Díky této vlastnosti lze na množině V zavést strukturu vektorového prostoru zúžením sčítání vektorů a násobení skalárem na V. Množinu V vždy uvažujeme s touto strukturou a nazýváme *vektorovým podprostorem* vektorového prostoru U.

Jsou-li U a V vektorové prostory, lze na množině $U\times V$ zavést strukturu vektorového prostoru tak, že se sčítání vektorů a násobení skalárem definuje takto:

$$(u_1,v_1)+(u_2,v_2)=(u_1+u_2,v_1+v_2), \tag{1.5}$$

$$r\cdot(u,v)=(ru,rv) \tag{1.6}$$

pro libovolné vektory $u_1,u_2,u\in U$, $v_1,v_2,v\in V$ a číslo $c\in\mathrm{R}$. Vektorový prostor $U\times V$ se nazývá *součin vektorových prostorů* U *a* V.

1.3 Báze a souřadnice

Uspořádanou m-tici $\alpha=(u_1,\dots,u_m)$ vektorů vektorového prostoru U nazýváme jeho *báze* (celý pojem je tedy *báze vektorového prostoru*), pokud jsou vektory $u_1,\dots,u_m$ lineárně nezávislé a pokud množina $\{u_1,\dots,u_m\}$ generuje vektorový prostor U.

V dalším textu definujeme pojmy, které ve svém názvu obsahují slovo „báze“ (afinní báze, bodová báze). Abychom zabránili nedorozumění, budeme o bazích vektorových prostorů hovořit také jako o *vektorových bazích.*

Následuje poznatek, který je hluboký:

Věta 1.1. *Všechny báze vektorového prostoru U mají stejný počet prvků.*

Počet prvků báze vektorového prostoru se nazývá jeho *dimenzí*.

Vektorový prostor U nemusí mít žádnou bázi, a tedy ani dimenzi. O takových vektorových prostorech říkáme, že mají nekonečnou dimenzi. Příklady lze snadno zkonstruovat, ale v geometrii se vektorovým prostorům nekonečné dimenze nebudeme věnovat (hodí se ale v počítačové grafice).

Je-li $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ báze vektorového prostoru U, pak rovnice $r^1 u_1 + \cdots + r^m u_m = v$ má právě jedno řešení $(r^1, \ldots, r^m)$. Čísla $r^1, \ldots, r^m$ obvykle značíme (pořadě) $v^1_\alpha, \ldots, v^m_\alpha$, případně jen $v^1, \ldots, v^m$, pokud je báze, ve které vektor v vyjadřujeme, zřejmá z kontextu. Celou m-tici $(v^1_\alpha, \ldots, v^m_\alpha)$ značíme v_α a nazýváme *souřadnicemi vektoru v v bázi α*. V případě, že nešetříme místem, ji píšeme do sloupce:

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} v^1_\alpha \\ v^2_\alpha \\ \vdots \\ v^m_\alpha \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

m-ticím čísel jsme běžně zvyklí říkat vektory a mluvit např. o *násobení matice vektorem*. Jak víme, ve skutečnosti se o vektory opravdu jedná, a to konkrétně o vektory z vektorového prostoru $\mathbf{R}^m$. Nesmíme ale zapomínat, že nejde o jediný možný typ vektorů.

Sčítání vektorů a násobení skalárem lze počítat pomocí souřadnic. Pro libovolné dva vektory $v, w \in U$ a číslo r totiž platí:

$$(v+w)_\alpha = v_\alpha + w_\alpha, \tag{1.8}$$

$$(rv)_\alpha = r(v_\alpha), \tag{1.9}$$

kde na pravé straně sčítáme a násobíme číslem m-tici čísel.

Je-li $\bar{\alpha} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$ druhá báze vektorového prostoru V, můžeme každý vektor báze α vyjádřit v této druhé bázi a souřadnice dát do matice:

$$\mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} = \begin{pmatrix} (u_1)^1_{\bar{\alpha}} & (u_2)^1_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^1_{\bar{\alpha}} \\ (u_1)^2_{\bar{\alpha}} & (u_2)^2_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^2_{\bar{\alpha}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_1)^m_{\bar{\alpha}} & (u_2)^m_{\bar{\alpha}} & \cdots & (u_m)^m_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Jak lze snadno ověřit pomocí (1.8) a (1.9), pro každý vektor v platí

$$v_{\bar{\alpha}} = \mathbf{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot v_\alpha. \tag{1.11}$$

Matici $M_{\bar{\alpha},\alpha}$ tedy můžeme použít k výpočtu souřadnic vektoru v v bázi $\bar{\alpha}$ z jeho souřadnic v bázi α. Matice $M_{\bar{\alpha},\alpha}$ se nazývá *matice přechodu od báze* α *k bázi* $\bar{\alpha}$.

Pro matice přechodu také platí

$$\mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot \mathrm{M}_{\alpha,\bar{\alpha}} = \mathrm{E}_m, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha'} \cdot \mathrm{M}_{\alpha',\alpha} = \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha}, \tag{1.13}$$

kde α, α' a $\bar{\alpha}$ jsou libovolné báze a E_m je jednotková matice.

Vztah (1.12) říká, že matice $\mathrm{M}_{\alpha,\bar{\alpha}}$ je inverzní k matici $\mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha}$ (a naopak). Vztah (1.13) umožňuje podstatné zjednodušení některých výpočtů, jak ještě uvidíme v dalším textu.

1.4 Lineární zobrazení a jejich matice

Zobrazení $\lambda : U \to V$ vektorových prostorů U a V se nazývá *lineární*, jestliže pro každé vektory $u_1, u_2, u \in U$ a skalár r platí

$$\lambda(u_1 + u_2) = \lambda(u_1) + \lambda(u_2), \tag{1.14}$$

$$\lambda(ru) = r\lambda(u). \tag{1.15}$$

Podmínky (1.14) a (1.15) jsou ekvivalentní podmínce

$$\lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) = r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2). \tag{1.16}$$

Množina $\lambda(U)$, tedy obraz množiny U při zobrazení λ se nazývá *obraz* (*image*) *zobrazení* λ. Je to vždy vektorový podprostor vektorového prostoru V. Množina $\ker\lambda = \{u \in U \mid \lambda(u) = 0\}$ (tedy vzor množiny $\{0\}$ při zobrazení λ) se nazývá *jádro lineárního zobrazení* λ. Je to vždy vektorový podprostor vektorového prostoru U.

Je-li $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ báze vektorového prostoru U, platí pro každý vektor $u \in U$ (s použitím (1.16)):

$$\lambda(u) = \lambda(u^1_\alpha u_1 + \cdots + u^m_\alpha u_m) = u^1_\alpha \lambda(u_1) + \cdots + u^m_\alpha \lambda(u_m).$$

Hodnota zobrazení λ ve vektoru u tedy závisí jen na jeho hodnotách v prvcích báze α a na souřadnicích vektoru u v bázi α. Lineární zobrazení λ je tedy jednoznačně určeno hodnotami $\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_m) \in V$.

Zvolme nyní navíc bázi $\beta = (v_1, \ldots, v_n)$ vektorového prostoru V a vyjádřeme v ní prvky $\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_m)$. Dostaneme n-tice

$$\lambda(u_1)_\beta = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta \\ \lambda(u_1)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \lambda(u_m)_\beta = \begin{pmatrix} \lambda(u_m)^1_\beta \\ \lambda(u_m)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}.$$

Pro souřadnicové vyjádření vektoru $\lambda(u)$ v bázi β platí

$$\begin{aligned}\lambda(u)_\beta &= u^1_\alpha \lambda(u_1)_\beta + \cdots + u^m_\alpha \lambda(u_m)_\beta \\ &= u^1_\alpha \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta \\ \lambda(u_1)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta \end{pmatrix} + \cdots + u^m_\alpha \begin{pmatrix} \lambda(u_m)^1_\beta \\ \lambda(u_m)^2_\beta \\ \vdots \\ \lambda(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

To lze napsat jako součin jisté matice s vektorem u_α:

$$\lambda(u)_\beta = \mathrm{M}^\lambda_{\beta,\alpha} \cdot u_\alpha, \tag{1.17}$$

kde matice $\mathrm{M}^\lambda_{\beta,\alpha}$ je dána takto:

$$\mathrm{M}^\lambda_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta & \lambda(u_2)^1_\beta & \cdots & \lambda(u_m)^1_\beta \\ \lambda(u_1)^2_\beta & \lambda(u_2)^2_\beta & \cdots & \lambda(u_m)^2_\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta & \lambda(u_2)^n_\beta & \cdots & \lambda(u_m)^n_\beta \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Matice obsahuje ve sloupcích souřadnice obrazů vektorů báze α v bázi β. Jmenuje se *matice lineárního zobrazení λ vzhledem k bazím α a β*.

Užitečnost matice lineárního zobrazení vyplývá ze vztahu (1.17). Ten ukazuje, že známe-li matici lineárního zobrazení vzhledem k bazím α a β, lze s její pomocí vypočítat souřadnice obrazu libovolného vektoru (v bázi β), známe-li jeho souřadnice v bázi α.

Lineární zobrazení $\lambda : U \to U$ se nazývá *lineární transformace vektorového prostoru U*. Pro bázi α prostoru U značíme matici $\mathrm{M}^\lambda_{\alpha,\alpha}$ jednoduše M^f_α a říkáme jí *matice lineární transformace λ vzhledem k bázi α*.

ÚLOHY KE KAPITOLE 1

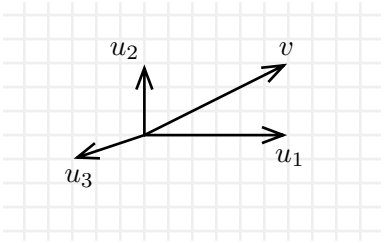
1.1. Definujte na intervalu $(0, +\infty)$ strukturu vektorového prostoru.

1.2. Definujte na množině $\mathbb{R}$ jinou než kanonickou strukturu vektorového prostoru.

1.3. Definujte strukturu vektorového prostoru na jednoprvkové množině $\{u\}$ a dvojprvkové množině $\{u, v\}$.

1.4. Ověřte, že vztahy (1.5) a (1.6) opravdu definují na množině $U \times V$ strukturu vektorového prostoru.

1.5. Na obr. 1.2 jsou znázorněny vektory u_1, u_2, u_3 a v v dvojrozměrném vektorovém prostoru U. Odhadněte z obrázku souřadnice vektoru v vzhledem k bazím $\alpha_1 = (u_1, u_2)$, $\alpha_2 = (u_1, u_3)$ a $\alpha_3 = (u_2, u_3)$. Vyjádřete alespoň dvěma způsoby vektor v jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2, u_3.



Obrázek 1.2: Obrázek k úloze 1.5

1.6. Je dvojice (u_3, v) z obr. 1.2 báze? A dvojice (v, u_3)? Odhadněte to z obrázku a pak ověřte výpočtem pomocí souřadnicového vyjádření těchto vektorů v jedné z bazí α_1, α_2, α_3 (nebo ve více).

1.7. Najděte bázi $\beta = (w_1, w_2)$ vektorového prostoru z úlohy 1.5 tak, aby

1. $(u_1)_\beta = (1,1)$ a $(u_2)_\beta = (1,-1)$,
2. $(u_1)_\beta = (1,1)$ a $(u_2)_\beta = (3,-3)$,
3. $(u_1)_\beta = (128, \frac{1}{8192})$ a $(u_2)_\beta = (256, \frac{1}{1024})$.

Vektory w_1 a w_2 vyjádřete pomocí jedné z bazí α_1, α_2, α_3. Výsledek nejprve zkuste odhadnout z obrázku (pokud to lze), pak ho ověřte výpočtem. Pokud to lze, načrtněte bázi do obrázku.

1.8. Je jeden vektor lineárně nezávislý?

1.9. Platí, že pokud jsou vektory lineárně nezávislé, nelze žádný z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních? Proč? Platí, že pokud jsou lineárně závislé, lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních? Proč? Uveďte příklady.

1.10. Ověřte rovnice (1.8) a (1.9).

1.11. Jak vypadá matice přechodu $\mathbf{M}_{\alpha,\alpha}$?

1.12. Napište všech šest možných netriviálních matic přechodu mezi bázemi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ z úlohy 1.5 a ověřte, že souřadnice vektoru v v těchto bazích se správně transformují.

1.13. Ukažte, že podmínky (1.14) a (1.15) jsou opravdu ekvivalentní podmínce (1.16).

1.14. Zjistěte podle definice, které z následujících funkcí z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$ jsou lineárními zobrazeními:

$$\lambda_1(x) = x+1 \qquad \lambda_2(x) = x^2 \qquad \lambda_3(x) = x, \qquad \lambda_4(x) = \sin x$$
$$\lambda_5(x) = \frac{x}{13}, \qquad \lambda_6(x) = 0, \qquad \lambda_7(x) = 1, \qquad \lambda_8(x) = \frac{13}{x}.$$

1.15. Charakterizujte všechna lineární zobrazení z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$.

1.16. Charakterizujte všechna lineární zobrazení z $\mathbf{R}$ do $(0,+\infty)$, z $(0,+\infty)$ do $\mathbf{R}$ a z $(0,+\infty)$ do $(0,+\infty)$, kde interval $(0,+\infty)$ je uvažován se strukturou vektorového prostoru, kterou jste na něm zavedli v úloze 1.1.

1.17. Dokažte, že jádro a obraz lineárního zobrazení jsou vektorové podprostrory.

1.18. Uveďte příklad vektorového prostoru dimenze 1, jehož prvky jsou uspořádané dvojice reálných čísel.

1.19. Zjistěte, grafy kterých funkcí z úlohy 1.14 jsou vektorovými podprostory $\mathbb{R}^2$. (Graf funkce $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je množina uspořádaných dvojic prvků $\mathbb{R}$ a jejich obrazů. Někdy se graf funkce ztotožňuje se samotnou funkcí.)

1.20. Charakterizujte všechny vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$.

1.21. Jsou všechny vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$ grafem nějaké funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$? Jsou všechny jednorozměrné vektorové podprostory $\mathbb{R}^2$ grafem nějaké funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

1.22. Charakterizujte všechny vektorové podprostory v $\mathbb{R}^3$.

1.23. Mějme zobrazení $\mathrm{d} : \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n$, které každému polynomu přiřadí jeho derivaci. Ukažte, že d je lineární zobrazení a najděte jeho jádro a obraz. Zkonstruujte jeho matici vzhledem k nějaké bázi prostoru P_n.

1.24. Lineární zobrazení zobrazí vektor o souřadnicích $(1,2,-1)$ na číslo 1 a vektor o souřadnicích $(2,-4,0)$ na číslo -2. Na jaké číslo zobrazí vektor o souřadnicích $(0,4,-1)$? A vektor o souřadnicích $(2,0,2)$?

1.25. Pro funkce z úlohy 1.14, které jsou lineárními zobrazeními, napište jejich matice vzhledem k bázi $\alpha = (1)$.

1.26. Dokažte, že pro báze α a β vektorového prostoru U platí $\mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{M}^{\mathrm{id}_U}_{\beta,\alpha}$, kde id_U je identické zobrazení prostoru U, tedy zobrazení dané předpisem $\mathrm{id}_U(u) = u$.

1.27. Vraťme se k úloze 1.5 a uvažujme lineární zobrazení $\lambda : U \to \mathbb{R}$ takové, že $\lambda(u_1) = 1$ a $\lambda(u_3) = 1$. Napište matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$, kde α jsou postupně báze α_1, α_2 a α_3 a β je báze $\mathbb{R}$ tvořená vektorem -1. Čemu se rovná $\lambda(v)$? Ověřte na nalezených maticích.

1.28. Podobně jako v předchozím příkladě napište všechny matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\alpha,\beta}$, kde $\lambda : \mathbb{R} \to U$ je lineární zobrazení takové, že $\lambda(1) = v$ a báze α a β jsou stejné jako v předchozím příkladě. Čemu se rovná $\lambda(2)$? Ověřte na nalezených maticích.

1.29. Navažme ještě jednou na úlohu 1.5 a uvažme lineární zobrazení $\lambda : U \to U$ takové, že $\lambda(u_1) = u_2$ a $\lambda(u_2) = u_3$. Najděte matice zobrazení λ vzhledem ke všem možným dvojicím bazí α_1, α_2 a α_3. Čemu se rovná $\lambda(v)$? Odhadněte a pak ověřte na nalezených maticích.

Kapitola 2

Afinní prostory

Afinní prostor je abstraktní matematický model, který popisuje v idealizované podobě některé vlastnosti našeho třírozměrného prostoru. Vychází z představy, že prostor je složen z bodů, které lze rovnoběžně posouvat o libovolný vektor.

2.1 Afinní prostory

Afinní prostor je neprázdná množina A (později i B, C a podobně), kterou jsme vybavili možností posouvání bodů o vektory, jak je napsáno v úvodním odstavci. Je to tedy množina společně s nějakou strukturou. Na rozdíl od jednoduchých algebraických struktur (které obvykle sestávají z jedné množiny s danými operacemi a relacemi) musí struktura afinního prostoru obsahovat i nějaký vektorový prostor, jehož prvky jsou vektory, o které lze naše body posouvat. Posunutí bodu o vektor nazýváme součet bodu a vektoru. Je to zobrazení, které bodu a vektoru přiřazuje bod. Výsledek součtu bodu a a vektoru u značíme $a +_A u$, nebo, pokud nemůže nastat nedorozumění, prostě $a + u$.

Jak je v matematice obvyklé, z vlastností, které požadujeme, aby afinní prostor měl, se snažíme vybrat co nejmenší počet co nejjednodušších tak, aby se z nich všechny podstatné vlastnosti afinního prostoru daly odvodit. To lze udělat různými způsoby (na Wikipedii je například uvedena jiná definice afinního prostoru než zde). Některé vlastnosti reálného prostoru, který pomocí afinních prostorů modelujeme, záměrně do definice nedáváme a také z ní nejdou odvodit. Nezavádíme například možnost měřit vzdálenost dvou bodů.

Řekneme, že na neprázdné množině A je dána *struktura afinního prostoru* (stručněji *afinní struktura*), je-li dán vektorový prostor U a zobrazení $+_A : A \times U \to A$ (značené obvykle infixově) takové, že

1. pro všechna $a \in A$, $u, v \in U$

$$(a +_A u) +_A v = a +_A (u + v), \tag{2.1}$$

2. pro všechna $a, b \in A$ existuje právě jedno $u \in U$ tak, že

$$a +_A u = b. \tag{2.2}$$

Množina A se strukturou afinního prostoru se nazývá *afinní prostor*, její prvky se nazývají *body*. Vektorový prostor U se nazývá *zaměření afinního prostoru* A.

Zobrazení $+$ se nazývá *sčítání bodů a vektorů*. Pro libovolné $a \in A$ a $u \in U$ se bod $a +_A u$ nazývá *součet bodu* a *a vektoru* u. Dolní index A většinou vynecháváme a místo $a +_A u$ píšeme prostě $a + u$.

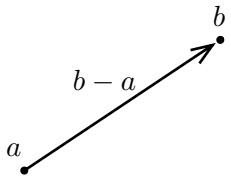
Jelikož podle podmínky 1 definice platí $(a + u) + v = a + (u + v)$, můžeme při přičítání dvou vektorů k bodu vynechat závorky a psát pouze $a + u + v$.

Vektor u z podmínky 2 se označuje $b - a$. Podmínka říká, že tento vektor existuje pro libovolné a a b, a to právě jeden. Přiřazením $(a, b) \mapsto b - a$ je tedy jednoznačně určené zobrazení z $A \times A$ do U. Vektoru $b - a$ se říká *rozdíl bodů* b *a* a. Přímo z definice tedy pro každé dva body a a b plyne

$$a + (b - a) = b \tag{2.3}$$

(jako $b - a$ jsme si totiž označili vektor u z podmínky 2, tedy vektor, pro který platí $a + u = b$).

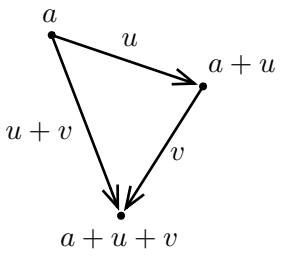
Afinní prostory si můžeme celkem snadno představit. Například kus papíru nebo třeba obrazovku počítače můžeme chápat jako část nějakého afinního prostoru (v druhém případě si ovšem nesmíme plést bod s pixelem!). Jak si v takovém případě představit vektory? Podle podmínky 2 definice struktury afinního prostoru určuje každá dvojice bodů jednoznačně nějaký vektor („pro všechna $a, b \in A$ existuje právě jedno $u \in U$ …“), nabízí se tedy představovat si vektor jako něco, co je těmito body nějak jednoznačně určeno. Ujala se šipka vedoucí z druhého bodu do prvního, jak je vidět na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Body a, b a vektor $b - a$.

Tato představa dobře odpovídá i první podmínce definice, jak vidíme na obrázku 2.2. Podle ní se má bod $(a + u) + v$ rovnat bodu $a + (u + v)$, což je opravdu v souladu s geometrickým způsobem, kterým znázorňujeme součet dvou vektorů (rovnoběžníková metoda).

Ke grafickému znázorňování vektorů je třeba ještě dodat, že dvě různé šipky mohou znázorňovat týž vektor, a to pokud body, které je určují, tvoří vrcholy rovnoběžníka.



Obrázek 2.2: Grafické znázornění podmínky 1. definice afinní struktury.

Je-li U vektorový prostor konečné dimenze, říká se o afinním prostoru A, že je také konečné dimenze. V takovém případě *dimenzí afinního prostoru* A nazýváme dimenzi vektorového prostoru U. Nemá-li vektorový prostor U konečnou dimenzi, říkáme i o afinním prostoru A, že nemá konečnou dimenzi (má nekonečnou dimenzi, je nekonečně rozměrný). Afinní prostor dimenze 1 se nazývá *afinní přímka*, afinní prostor dimenze 2 *afinní rovina*.

Pro počítačovou grafiku jsou samozřejmě důležité hlavně afinní prostory dimenze nejvýše 3.

Na vektorovém prostoru U zavádíme *kanonickou strukturu afinního prostoru* takto: zaměřením prostoru U volíme samotný vektorový prostor U, pro libovolný bod $a \in U$ a vektor $v \in U$ (zde je dělení na body a vektory čistě formální) definujeme jejich součet jako součet vektorů ve vektorovém prostoru U. Pokud nebude řečeno jinak, budeme vektorové prostory uvažovat vždy s kanonickou strukturou afinního prostoru, popsanou v předchozím příkladě.

Příklad 2.1. Víme, že na n-té kartézské mocnině množiny reálných čísel $\mathbf{R}^n$ je dána kanonická struktura vektorového prostoru. Tu lze použít k zavedení afinní struktury na $\mathbf{R}^n$.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme množinu $\mathbf{R}^n$ uvažovat vždy s kanonickou strukturou afinního prostoru.

Abychom odlišili, kdy prvek $\mathbf{R}^n$ chápeme jako bod z afinního prostoru $\mathbf{R}^n$ a kdy jako vektor z vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$, budeme v prvním případě používat hranaté a ve druhém kulaté závorky.

2.2 Základní vlastnosti afinní struktury

V této části dokážeme některé vlastnosti součtu bodu a vektoru a rozdílu bodů. Vlastnosti jsou všechny přirozené, přesto je třeba je dokázat. Každému matematikovi (včetně autora tohoto textu) se někdy stalo, že narazil na „zřejmá“ tvrzení, která se později ukázala jako nepravdivá.

Věta 2.1. *Pro libovolný afinní prostor A se zaměřením U a prvky $a, b \in A$, $u \in U$ platí*

1. $a+0=a$,
2. $a-b=-(b-a)$,
3. $(a+u)-b=(a-b)+u$,

„0“ v bodu 1. je nulový vektor ve vektorovém prostoru U.

Důkaz. 1. Podle podmínky 2 definice afinního prostoru existuje právě jeden vektor $u \in U$ takový, že $a+u=a$. Odtud plyne rovnost $a+u=(a+u)+u$, která podle podmínky 1 znamená $a+u=a+(u+u)$, což podle podmínky 2 (jednoznačnost) vede k $u=u+u$. Tuto rovnost ale splňuje pouze nulový vektor (proč?). Z rovnosti $a+u=a$ tedy vyplynulo $u=0$, což znamená, že žádný jiný vektor kromě nulového tuto rovnost nesplňuje. To společně s podmínkou 2 (existence) dokazuje první bod věty.

2. Označme $a-b=u$, $b-a=v$. Dostáváme $b=a+v=(b+u)+v=b+(u+v)$. Podle prvního bodu této věty, který jsme již dokázali, platí $u+v=0$, neboli $u=-v$.

3. Vektor $v=(a+u)-b$ splňuje podmínku $b+v=a+u$. Přičtením vektoru $-v$ k oběma stranám této rovnice a úpravou dostaneme $a=b+(v-u)$. Odtud plyne $v-u=a-b$. Nyní, přičtením vektoru u dostaneme $v=(a-b)+u$, což je dokazované tvrzení.

Projděte všechny výskyty symbolu „+“ v důkazu předchozí věty a rozhodněte, kdy označuje sčítání vektorů ve vektorovém prostoru U a kdy přičítání bodu z afinního prostoru A a vektoru z U (tedy zobrazení $+_A$ z definice afinního prostoru). Podobně rozhodněte, kdy symbol „$-$“ označuje odečítání vektorů (tedy operaci na vektorovém prostoru U) a kdy rozdíl bodů (tedy zobrazení $A \times A \to U$).

V případech, kdy symboly „+“ a „$-$“ neoznačují základní operace s reálnými čísly nebo vektory, ale slouží k označení sčítání bodů s vektory a odečítání bodů, jak jsme je definovali v této kapitole, nelze k práci s nimi používat naše znalosti z oblasti reálných čísel či vektorových prostorů. Je nutné postupovat pouze podle poznatků o afinních prostorech. Například v důkazu předchozí věty je třeba umět každý jednotlivý krok zdůvodnit pomocí definice afinního prostoru.

Věta 2.2. *Pro libovolné tři body a_1, a_2, a_3 afinního prostoru A platí*

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)=a_3-a_1.$$

Důkaz. V tvrzení se vyskytují tři vektory: $u_1=a_2-a_1$, $u_2=a_3-a_2$ a $v=a_3-a_1$. Je třeba dokázat, že $u_1+u_2=v$. Důkaz povedeme rovnou z definice afinní struktury. Zde najdeme jedinou možnost, jak ověřit, že se dva vektory rovnají: podmínku jednoznačnosti v podmínce 2. Podívejme se tedy na body, kterými jsou levá a pravá strana požadované rovnosti určeny. Pro vektor v platí $a_1+v=a_3$. Pro vektor u_1 máme $a_1+u_1=a_2$ a pro u_2: $a_2+u_2=a_3$.

Dosazením druhého vztahu do třetího dostaneme $(a_1+u_1)+u_2=a_3$. Podle podmínky 1 definice afinní struktury tedy platí $a_1+(u_1+u_2)=a_3$. Před chvílí jsme si ale také napsali, že $a_1+v=a_3$. Nyní je čas použít podmínku jednoznačnosti: vektor u_1+u_2 i vektor v mají oba tu vlastnost, že jejich přičtením k bodu a_1 dostaneme bod a_3. Protože takový vektor je jediný, musí platit $u_1+u_2=v$, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Věta 2.3. *Pro libovolné dva body a,b afinního prostoru A a vektory u,v jeho zaměření platí*

$$(a+u)-(b+v)=(a-b)+(u-v).$$

Důkaz. Tvrzení se týká rovnosti dvou vektorů. Budeme postupovat podobně jako v důkazu předchozí věty: ukážeme, že vektor na levé i pravé straně je určen stejnou dvojicí bodů. Vektor na levé straně, označme si ho w, splňuje $(b+v)+w=a+u$. Ukážeme, že totéž splňuje i vektor na pravé straně. Díky podmínce 1 definice afinní struktury nemusíme psát některé závorky. Máme: $b+v+(a-b)+(u-v)=b+(a-b)+v+(u-v)$. Zde si můžeme všimnout dvou věcí: za prvé, vektor $a-b$ je podle definice vektor, jehož přičtením k bodu b dostaneme bod a. Neboli, $b+(a-b)=a$. A za druhé, $v+(u-v)=u$, protože vektorový prostor U je komutativní grupa. Celkově nám vychází $b+(a-b)+v+(u-v)=a+u$, což je stejný výsledek jako pro vektor w. Tím je tedy věta dokázána.

ÚLOHY KE KAPITOLE 2

2.1. Lze zavést strukturu afinního prostoru na jednoprvkové množině $\{a\}$? Kolika způsoby?

2.2. Lze definovat afinní strukturu na množině $A=\{a,b\}$, kde $a\neq b$?

2.3. Uveďte příklad množiny A, vektorového prostoru U a zobrazení $+_A$ tak, aby v definici afinního prostoru

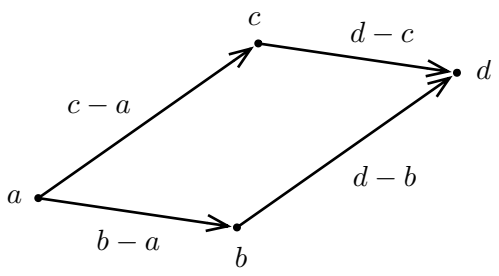
1. nebyla splněna podmínka 1 a byla splněna podmínka 2,
2. byla splněna podmínka 1 a vektor u z podmínky 2 neexistoval,
3. byla splněna podmínka 1 a vektor u z podmínky 2 existoval více než jeden.

2.4. Ověřte, že v definici kanonické struktury afinního prostoru na vektorovém prostoru jsou splněny podmínky definice afinního prostoru.

2.5. Libovolné tři body a, b, c afinního prostoru lze jednoznačně „doplnit na rovnoběžník“ v tom smyslu, že existuje právě jeden bod d takový, že vektor $d-c$ je roven vektoru $b-a$ a vektor $d-b$ je roven vektoru $c-a$. Dokažte. Situace je znázorněna na obrázku 2.3. .

2.6. Pro afinní prostor A_1 se zaměřením U_1 a afinní prostor A_2 se zaměřením U_2 definujte na množině $A_1\times A_2$ strukturu afinního prostoru se zaměřením $U_1\times U_2$.

2.7. Zvolme bod $a_0\in A$ a definujme zobrazení $f\colon A\to U$ předpisem $f(a)=a-a_0$. Ukažte, že toto zobrazení je bijekce a najděte jeho inverzi.



Obrázek 2.3: obrázek k úloze 2.5

2.8. Následující podmínky pro afinní strukturu lze nalézt na Wikipedii (přepsáno do našeho značení):

1'. Pro každé $a \in A$ platí $a +_A 0 = a$.

2'. Pro všechna $a \in A$, $u, v \in U$ platí $(a +_A u) +_A v = a +_A (u + v)$.

3'. Pro každé $a \in A$ je zobrazení z U do A, které vektoru $u \in U$ přiřazuje prvek $a +_A u$, bijekce.

Jsou tyto podmínky ekvivalentní našim podmínkám 1 a 2?

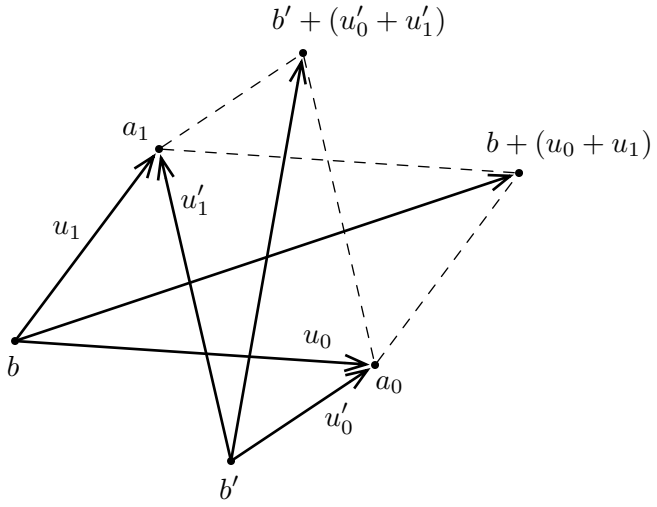
Kapitola 3

Afinní podprostory

U matematických struktur se studují i jejich *podstruktury*. Obvykle jde o podmnožiny, na kterých lze zavést strukturu stejného typu patřičným zúžením z původní struktury. Už jsme se setkali s vektorovými podprostory, které jsou podstrukturami vektorových prostorů. Afinní prostory mají rovněž své podstruktury, jsou jimi *afinní podprostory*.

3.1 Afinní kombinace a afinní obal

Začneme pozorováním. Na obrázku 3.1 vidíme body a_0, a_1, b afinního prostoru A. Dvojice



Obrázek 3.1: Pokud součet koeficientů r^0 a r^1 není roven 1, závisí bod $b + (r^0 u_0 + r^1 u_1)$ na volbě bodu b. Obrázek ukazuje případ $r^0 = r^1 = 1$.

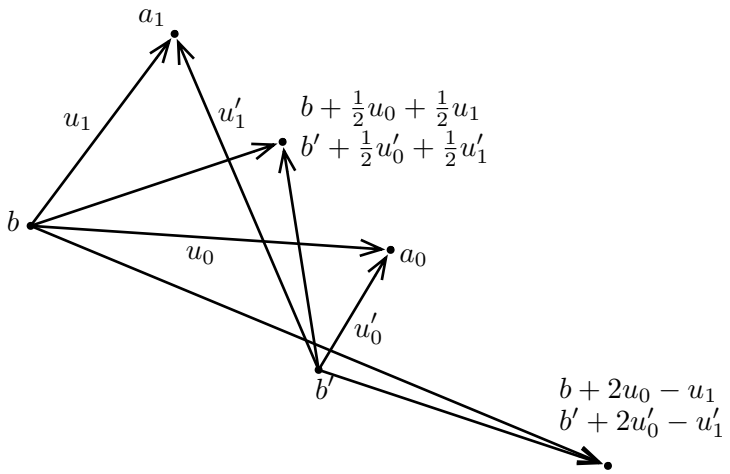
bodů a_0, b a a_1, b definují vektory $u_0 = a_0 - b$ a $u_1 = a_1 - b$, které jsou na obrázku rovněž

znázorněny. Lineární kombinace $r^0u_0+r^1u_1$ těchto vektorů pak definuje bod $b+(r^0u_0+r^1u_1)$ (na obrázku je znázorněn případ $r^0=r^1=1$). Pokud místo bodu b vybereme nějaký jiný bod b', pak se výsledný bod, získaný stejným postupem, bude od původního lišit:

$$b+(r^0u_0+r^1u_1)\neq b'+(r^0u'_0+r^1u'_1),$$

což je patrné i z obrázku.

Situace se ovšem změní, pokud $r^0+r^1=1$. To můžeme odhadnout už z obrázku 3.1, když se podíváme na průsečík šipek znázorňujících vektory u_0+u_1 a $u'_0+u'_1$. Na obrázku 3.2 jsou zobrazeny případy $r^0=r^1=\frac{1}{2}$ a $c_0=2$ a $c_1=-1$. Zřejmě pokud $r^0+r^1=1$, pak



Obrázek 3.2: Pokud součet koeficientů r^0 a r^1 je roven 1, bod $b+r^0u_0+r^1u_1$ nezávisí na volbě bodu b. Obrázek ukazuje dva případy: $r^0=r^1=\frac{1}{2}$ a $r^0=2$, $r^1=-1$

$b+(r^0u_0+r^1u_1)=b'+(r^0u'_0+r^1u'_1)$. Následující věta naši domněnku potvrzuje pro libovolný počet bodů.

Věta 3.1. *Mějme body $a_0,a_1,\ldots,a_m$ afinního prostoru A. Pro libovolné dva body $b,b'\in A$ a čísla $r^0,r^1,\ldots,r^m$ taková, že $r^0+r^1+\cdots+r^m=1$, platí*

$$\begin{aligned} &b+r^0(a_0-b)+r^1(a_1-b)+\cdots+r^m(a_m-b)\\ &\quad=b'+r^0(a_0-b')+r^1(a_1-b')+\cdots+r^m(a_m-b'). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Důkaz. Zkusíme vypočítat rozdíl levé a pravé strany. Měl by nám vyjít nulový vektor.

Podle Věty 2.3 je tento rozdíl roven

$$\begin{aligned}(b-b')+r^0(a_0-b+b'-a_0)+r^1(a_1-b+b'-a_1)+\cdots\\ \cdots+r^m(a_m-b+b'-a_m)\\ =(b-b')+r^0(b'-b)+r^1(b'-b)+\cdots+r^m(b'-b)\\ =(b-b')+(r^0+r^1+\cdots+r^m)(b'-b)\\ =(b-b')+(b'-b)\\ =0.\end{aligned}$$

Z uvedené věty vyplývá, že hodnota výrazu $b+r^0(a_0-b)+r^1(a_1-b)+\cdots+r^m(a_m-b)$ nezávisí na volbě bodu b. Závisí tedy pouze na bodech $a_0,a_1,\ldots,a_m$ a číslech $r^0,r^1,\ldots,r^m$ (jejichž součet je roven 1). Tento výraz nazýváme *afinní kombinací bodů* $a_0,a_1,\ldots,a_m$ *s koeficienty* $r^0,r^1,\ldots,r^m$ a značíme

$$r^0a_0+r^1a_1+\cdots+r^ma_m. \tag{3.2}$$

Tento výraz je třeba vnímat jako celek a nechápat jeho části jako výsledek aplikace nějakých operací. Body nelze násobit čísly, ani je nelze sčítat. Je třeba mít také na paměti, že v tomto výrazu musí být součet koeficientů $r^0,r^1,\ldots,r^m$ roven jedné.

Příklad 3.1. Pro body $a_0,a_1,a_2,a_3\in A$ a čísla $r^0+r^1=r^2+r^3=s^0+s^1=1$ platí

$$s^0(r^0a_0+r^1a_1)+s^1(r^2a_2+r^3a_3)=s^0r^0a_0+s^0r^1a_1+s^1r^2a_2+s^1r^3a_3. \tag{3.3}$$

Afinní kombinace afinních kombinací lze tedy roznásobovat jakoby platil distributivní zákon. Ověření je poměrně jednoduché, obnáší jen trochu počítání: zvolme pomocný bod $b\in A$ a vypočítejme afinní kombinace na levé straně (s tím, že afinní kombinace v závorkách spočítáme opět s pomocným bodem b). Aby to šlo snadněji, označíme si pomocné vektory: $u_0=a_0-b$, $u_1=a_1-b$, $u_2=a_2-b$, $u_3=a_3-b$ a body $c_0=r^0a_0+r^1a_1$ a $c_1=r^2a_2+r^3a_3$.

Podle definice afinní kombinace tedy máme $c_0=r^0a_0+r^1a_1=b+r^0u_0+r^1u_1$, $c_1=r^2a_2+r^3a_3=b+r^2u_2+r^3u_3$. A dále $s^0c_0+s^1c_1=b+s^0(b+r^0u_0+r^1u_1-b)+s^1(b+r^2u_2+r^3u_3-b)=b+s^0(r^0u_0+r^1u_1)+s^1(r^2u_2+r^3u_3)=b+s^0r^0u_0+s^0r^1u_1+s^1r^2u_2+s^1r^3u_3$, což je přesně (podle definice) afinní kombinace na pravé straně.

Příklad 3.2. Z předchozího příkladu plyne, že každou afinní kombinaci více než dvou bodů lze vyjádřit pomocí afinních kombinací dvojic bodů. Ukážeme si to na příkladě afinní

kombinace $r^0a_0 + r^1a_1 + r^2a_2$. Pokud je $r^0 + r^1 \neq 0$, platí podle předchozího příkladu

$$\begin{aligned} r^0a_0 + r^1a_1 + r^2a_2 &= r^0a_0 + r^1a_1 + r^2a_2 + 0a_2 \\ &= (r^0 + r^1)\left(\frac{r^0}{r^0 + r^1}a_0 + \frac{r^1}{r^0 + r^1}a_1\right) + r^2(1a_2 + 0a_2) \\ &= (r^0 + r^1)\left(\frac{r^0}{r^0 + r^1}a_0 + \frac{r^1}{r^0 + r^1}a_1\right) + r^2a_2 \end{aligned}$$

přičemž $\frac{r^0}{r^0+r^1} + \frac{r^1}{r^0+r^1} = 1$, takže uvnitř velké závorky je opravdu afinní kombinace dvou bodů, stejně jako je afinní kombinací dvou bodů i celý výraz, protože $(r^0 + r^1) + r^2 = 1$. Co se situací, kdy $r^0 + r^1 = 0$?

Příklad 3.3. Pro body $a_1, a_2, a_3 \in A$ můžeme vypočítat nový bod a_4 jako afinní kombinaci $a_3 + a_2 - a_1$ (součet koeficientů je roven jedné). Také můžeme položit $\bar{a}_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$, kde na pravé straně uvažujeme součet bodu a_3 a vektoru $a_2 - a_1$. Ukažme, že $\bar{a}_4 = a_4$. Zvolíme jako pomocný bod b bod a_3. Podle definice afinní kombinace máme

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 - a_1 \\ &= a_3 + (a_3 - a_3) + (a_2 - a_3) - (a_1 - a_3) \\ &= a_3 + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_1) \\ &= a_3 + (a_2 - a_1) \\ &= \bar{a}_4. \end{aligned}$$

Příklad 3.4. Podle binomické věty platí pro každé reálné číslo t

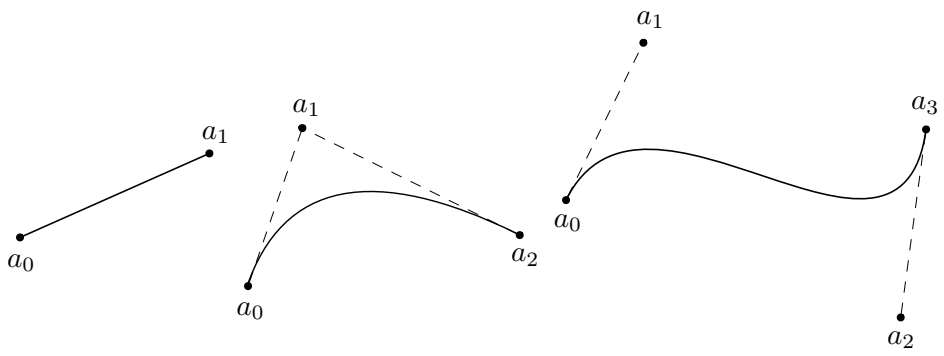
$$1 = (t + (1-t))^2 = t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2.$$

Na pravé straně máme tři čísla, jejichž součet je roven jedné. Můžeme je tedy použít jako koeficienty afinní kombinace. Pro tři body $a_0, a_1, a_2 \in A$ tak dostáváme nový bod

$$b_t = t^2a_0 + 2t(1-t)a_1 + (1-t)^2a_2.$$

Bod b_t závisí na volbě čísla t, přičemž $b_0 = a_2$ a $b_1 = a_0$ (pokud bod a_1 neleží na přímce určené body a_0 a a_2, pak neexistuje hodnota t, pro kterou by $b_t = a_1$). Množina všech bodů b_t pro $t \in [0,1]$) se nazývá *kvadratická Bézierova křivka.*

Obecně můžeme výraz $t + (1-t)$ umocnit libovolným přirozeným číslem. Dostaneme tak koeficienty afinní kombinace libovolného počtu bodů a Bézierovy křivky libovolného stupně. Body, pomocí nichž byla křivka vytvořena, se nazývají jejími *řídicími body.* Na obrázku 3.3 je ukázka lineární, kvadratické a kubické Bézierovy křivky (tj. Bézierovy křivky prvního, druhého a třetího stupně) pro $t \in [0,1]$.



Obrázek 3.3: Lineární, kvadratická a kubická Bézierova křivka.

Body kubické Bézierovy křivky s řídicími body a_0, a_1, a_2, a_3 jsou dány vztahem

$$b_t = t^3 a_0 + 3t^2(1-t)a_1 + 3t(1-t)^2 a_2 + (1-t)^3 a_3. \tag{3.4}$$

Bézierovy křivky jsou hodně používané v počítačové grafice.

Afinním obalem neprázdné množiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech afinních kombinací prvků množiny K. Afinní obal množiny K označujeme symbolem $\mathrm{Aff}(K)$. Platí

$$\mathrm{Aff}(K) = \left\{ r^0 a_0 + \cdots + r^k a_k \mid k \geq 1,\ a_0, \ldots, a_k \in K,\ r^0 + \cdots + r^k = 1 \right\}. \tag{3.5}$$

Věta 3.2. *Pro libovolnou neprázdnou množinu $K \subseteq A$ platí* $\mathrm{Aff}(\mathrm{Aff}(K)) = \mathrm{Aff}(K)$.

Důkaz. Mějme bod $a \in \mathrm{Aff}(\mathrm{Aff}(K))$. Tento bod je afinní kombinací afinních kombinací bodů z K. Pro jednoduchost předpokládejme, že ve všech afinních kombinacích vystupují pouze dva body (obecný případ se dokazuje stejně, je to jen více psaní). Je tedy

$$a = s^0(r^0 a_0 + r^1 a_1) + s^1(r^2 a_2 + r^3 a_3).$$

Podle příkladu 3.1 ale

$$s^0(r^0 a_0 + r^1 a_1) + s^1(r^2 a_2 + r^3 a_3) = s^0 r^0 a_0 + s^0 r^1 a_1 + s^1 r^2 a_2 + s^1 r^3 a_3.$$

To ovšem znamená, že $a \in \mathrm{Aff}(K)$.

3.2 Afinní podprostory

Neprázdná podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U se nazývá *afinní podprostor afinního prostoru* A, jestliže $\mathrm{Aff}(B) = B$.

Podle příkladu 3.2 stačí k důkazu vlastnosti $\mathrm{Aff}(B) = B$ dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z B je prvkem B (zdůvodněte!).

Věta 3.3. *Neprázdná podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U je jeho afinním podprostorem, právě když existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ takový, že jsou splněny následující podmínky:*

1. *Pro každé $a \in B$, $u \in V$ platí $a+u \in B$.*
2. *Pro každé $a,b \in B$ platí $b-a \in V$.*

Důkaz. Zleva doprava: Položme $V = \{c-b \mid b,c \in B\}$ a ověřme podmínky 1 a 2. Podmínka 1: u je tvaru $c-b$ pro $b,c \in B$, takže $a+u = a+(c-b)$. To je ale podle příkladu 3.3 rovno afinní kombinaci $a+c-b$, takže podle definice afinního podprostoru jde o prvek B. Podmínka 2 je splněna triviálně.

Zprava doleva: Tady předpokládáme, že existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ tak, že jsou splněny podmínky 1 a 2, a dokazujeme $\mathrm{Aff}(B) = B$.

K důkazu vlastnosti $\mathrm{Aff}(B) = B$ stačí dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z B je prvkem B. Mějme tedy nějakou afinní kombinaci dvou bodů $b_0, b_1 \in B$:

$$b = r^0 b_0 + r^1 b_1, \quad r^0 + r^1 = 1.$$

Podle definice afinní kombinace máme

$$b = b_0 + r^0(b_0 - b_0) + r^1(b_1 - b_0) = b_0 + r^1(b_1 - b_0).$$

Podle podmínky 2 je vektor $b_1 - b_0$ prvkem V. Je tedy prvkem V i jeho násobek $r^1(b_1 - b_0)$. Podmínka 1 nám tedy zaručí $b \in B$.

Vektorový prostor V z Věty 3.3 se nazývá *Zaměření afinního podprostoru B*.

Příklad 3.5. Každý vektorový podprostor daného vektorového prostoru je jeho afinním podprostorem. Naopak to neplatí.

Věta 3.4. *Je-li A afinní prostor se zaměřením U a $B \subseteq A$ jeho afinní podprostor se zaměřením $V \subseteq U$, pak množina B spolu s vektorovým prostorem V a zobrazením $+_B : B \times V \to B$ vzniklým zúžením zobrazení $+_A$ je afinní prostor.*

Důkaz. Přenecháme čtenáři. Je třeba ověřit podmínky definice afinního prostoru nebo postupovat podle Věty 3.3.

Afinní podprostory budeme vždy uvažovat se strukturou afinního prostoru uvedenou v předchozí větě. Můžeme tedy hovořit o dimenzi afinního podprostoru (také například o afinní nebo bodové bázi afinního podprostoru, které jsou definovány dále). Je-li dimenze afinního prostoru A rovna m a dimenze afinního podprostoru $B \subseteq A$ rovna $m-1$, pak afinní podprostor B nazýváme *nadrovinou v afinním prostoru A*.

Pro množinu $B = \{a \in A \mid a = a_0 + u, u \in V\}$, kde $V \subseteq U$ je vektorový podprostor, zavádíme symbolické označení

$$B = a_0 + V. \tag{3.6}$$

Následující věta ukazuje, že každý podprostor afinního prostoru lze charakterizovat pomocí jednoho bodu a vektorového podprostoru zaměření.

Věta 3.5. *Mějme afinní prostor A se zaměřením U.*

1. Je-li $a_0 \in A$ bod a $V \subseteq U$ vektorový podprostor, pak množina $B = a_0 + V$ je podprostor afinního prostoru A, jehož zaměření je V.

2. Je-li B podprostor afinního prostoru A se zaměřením $V \subseteq U$, $a_0 \in B$ bod, pak $B = a_0 + V$.

Důkaz. Plyne z Věty 3.3.

Je-li $(u_1, \ldots, u_m)$ báze vektorového podprostoru $V \subseteq U$, platí pro libovolný bod $a_0 \in A$,

$$a_0 + V = \left\{ a \in A \;\middle|\; a = a_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i u_i,\ t_1, \ldots, t_m \in R \right\}. \tag{3.7}$$

Rovnice

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i u_i \tag{3.8}$$

se nazývá *parametrická rovnice afinního podprostoru* $a_0 + V$.

Příklad 3.6. Parametrická rovnice přímky je tedy

$$a = a_0 + tu, \tag{3.9}$$

kde a_0 je libovolný bod přímky a u libovolný nenulový vektor jejího zaměření.

Příklad 3.7. Parametrickou rovnici přímky lze pomocí dvou jejích různých bodů a_1, a_2 napsat takto:

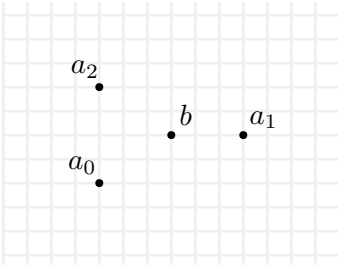
$$a = a_1 + t(a_2 - a_1). \tag{3.10}$$

ÚLOHY KE KAPITOLE 3

3.1. Nalezněte a zakreslete do obrázku afinní kombinace $a_0 + a_1 - a_2$ a $\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}a_1 + a_2$ (viz obr. 3.4). Jako pomocné body použijte postupně všechny čtyři body z obrázku.

3.2. Jaká afinní kombinace bodů a_0, a_1, a_2 z předchozího příkladu je rovna b?

3.3. Je-li V vektorový prostor s kanonickou strukturou afinního prostoru, pak afinní kombinace jeho prvků splývají s lineárními. Například pro dva vektory v_1, v_2 a čísla r^1, r^2 taková, že $r^1 + r^2 = 1$, je afinní kombinace $r^1 v_1 + r^2 v_2$ rovna stejně označené lineární kombinaci. Zdůvodněte.



Obrázek 3.4: Obrázek k úloze 3.1.

3.4. Pro bod $a \in A$ a vektory u_1, u_2 ze zaměření afinního prostoru A označme $b_1 = a + u_1$, $b_2 = a + u_2$. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla r^1, r^2 je bod $a + r^1 u_1 + r^2 u_2$ (součet bodu a vektoru) roven afinní kombinaci

$$(1 - r^1 - r^2)a + r^1 b_1 + r^2 b_2.$$

3.5. Uveďte příklad afinního prostoru A a množiny $B \subseteq A$, která má všechny vlastnosti z Věty 3.3 kromě podmínky 1.

3.6. Uveďte příklad afinního prostoru A a množiny $B \subseteq A$, která má všechny vlastnosti z Věty 3.3 kromě podmínky 2.

3.7. Rozhodněte, zda následující podmínka je ekvivalentní podmínce „B je afinním podprostorem A“: B je neprázdná podmnožina A a existuje podmnožina $V \subseteq U$ tak, že jsou splněny následující podmínky:

1. Pro každé $a \in B$, $u \in V$ platí $a + u \in B$.
2. Pro každé $a, b \in B$ platí $b - a \in V$.

3.8. Charakterizujte všechny afinní podprostory $B \subseteq \mathrm{R}^2$.

3.9. Charakterizujte všechny afinní podprostory $B \subseteq \mathrm{R}^3$.

3.10. Mějme dva afinní podprostory B_1, B_2 afinního prostoru A takové, že $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Ukažte, že množina $B_1 \cap B_2$ je afinním podprostorem afinního prostoru A.

3.11. Mějme vektorové prostory U a V a lineární zobrazení $\lambda : U \to V$. Dokažte, že pro libovolný vektor $v \in V$ je množina $\lambda^{-1}(\{v\})$ afinním podprostorem prostoru U. (Vektorový prostor U uvažujeme se standardní strukturou afinního prostoru.)

3.12. Ukažte, že pokud dva různé body a, b leží v afinním podprostoru $B \subseteq A$, leží v něm i celá přímka tyto dva body obsahující.

3.13. Ukažte, že pokud pro každé dva různé body neprázdné množiny B v afinním prostoru A leží v B i celá přímka tyto dva body obsahující, je B afinním podprostorem afinního prostoru A.

Kapitola 4

Souřadnicové systémy na afinních prostorech

Báze a souřadnice v afinních prostorech hrají podobnou roli jako (vektorové) báze a souřadnice v prostorech vektorových. Představují způsob, jak prvky světa, který modelujeme, ztotožnit s n-ticemi reálných čísel, které můžeme reprezentovat v počítači a se kterými můžeme počítat.

V této kapitole zavádíme základní pojem afinní báze a afinních souřadnic a pojem matice přechodu mezi afinními bazemi, který je analogií pojmu matice přechodu mezi (vektorovými) bazemi vektorových prostorů.

Matice přechodu mezi afinními bazemi jsou základním nástrojem v analytické geometrii. Pokud prostor, se kterým pracujeme, popisujeme pomocí více různých bazí (což je obvyklé), potřebujeme nějak charakterizovat vztah mezi nimi. Matice přechodu mezi afinními bazemi se používají v počítačové grafice.

Kromě afinních bazí a souřadnic v afinním prostoru se věnujeme důležitému pojmu bodů v obecné poloze a s ním souvisejícími bodovými bazemi a barycentrickými souřadnicemi.

4.1 Afinní báze a souřadnice

Mějme afinní prostor A dimenze m se zaměřením U. Pro bod $a_0 \in A$ a bázi $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ vektorového prostoru U nazýváme dvojici $\varphi = (\alpha, a_0)$ *afinní bazí* afinního prostoru A. Bod a_0 nazýváme *počátkem* báze φ. Afinní bázi φ zapisujeme také jako $(m+1)$-tici $(u_1, \ldots, u_m, a_0)$.

Pro libovolný bod $a \in A$ nazýváme *afinními souřadnicemi (souřadnicovým vyjádřením)*

bodu a vzhledem k afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$ $(m+1)$-tici

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0)^1_\alpha \\ (a-a_0)^2_\alpha \\ \vdots \\ (a-a_0)^m_\alpha \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Čísla $(a-a_0)^1_\alpha, (a-a_0)^2_\alpha, \ldots, (a-a_0)^m_\alpha$ značíme (pořadě) $a^1_\varphi, a^2_\varphi, \ldots, a^m_\varphi$, případně jen $a^1, a^2, \ldots, a^m$, pokud je afinní báze φ zřejmá z kontextu.

Souřadnicové vyjádření bodu a vzhledem k afinní bázi φ tedy vznikne tak, že se najdou souřadnice vektoru $a - a_0$ vzhledem k bázi α vektorového prostoru U a doplní se číslem 1 (důvody této formality vysvitnou postupně). Kvůli odlišení od souřadnic vektorů budeme afinní souřadnice bodů zapisovat v hranatých závorkách.

V příkladech je někdy nešikovné psát neustále jedničku jako poslední složku souřadnic bodů. Pokud ji vynecháme, hovoříme o *zkrácených afinních souřadnicích*. Je-li tedy souřadnicové vyjádření bodu a v afinní bázi φ rovno $[1,2,3,1]$ (tedy $a_\varphi = [1,2,3,1]$), jsou jeho zkrácené souřadnice $[1,2,3]$. Pro zkrácené souřadnice nezavádíme žádnou zvláštní symboliku (pokud nehrozí nedorozumění, píšeme opět a_φ) a používáme je jen při výpočtech kvůli ušetření místa.

Příklad 4.1. Nalezněme souřadnice bodu $a = [0,-2,1] \in \mathrm{R}^3$ vzhledem k afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$, kde $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ a

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Máme

$$a - a_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Hledáme tedy souřadnice vektoru $(-1,-2,0)$ v bázi α. Jelikož (jak lze zjistit například vyřešením soustavy lineárních rovnic)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

dostáváme

$$(a-a_0)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

čili

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Je-li $a_0 = [0,\dots,0] \in R^m$ a α kanonická báze vektorového prostoru R^m, nazývá se afinní báze (α, a_0) afinního prostoru R^m *kanonickou afinní bazí* prostoru R^m.

Součet bodu a vektoru lze v afinních souřadnicích vyjádřit pomocí sčítání souřadnic, pokud k souřadnicím vektoru přidáme na konec nulu. Když pro vektor $u \in U$ a afinní souřadnicový systém $\varphi = (\alpha, a_0)$ afinního prostoru A se zaměřením U zavedeme označení

$$u_\varphi = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

máme pro libovolný bod $a \in A$

$$(a+u)_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0+u)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-a_0)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = a_\varphi + u_\varphi. \tag{4.8}$$

Parametrickou rovnici afinního podprostoru (3.8) můžeme přepsat pomocí souřadnicového vyjádření bodů a vektorů v afinní bázi φ takto:

$$a_\varphi = (a_0)_\varphi + \sum_{i=1}^{m} t_i (u_i)_\varphi \tag{4.9}$$

s tím, že poslední řádek této rovnice je triviální a je možné ho vynechat (tedy použít zkrácené afinní souřadnice).

Příklad 4.2. Proto parametrická rovnice roviny v trojrozměrném afinním prostoru A vzhledem k nějaké afinní bázi φ může vypadat takto:

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a ve zkrácených souřadnicích (s vynecháním posledního řádku):

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mějme afinní bázi $\varphi = (u_1, u_2, \ldots, u_m, a_0)$ afinního prostoru A. Množina K všech bodů, jejichž každá souřadnice vzhledem k této bázi leží v intervalu $[0,1]$, se nazývá *rovnoběžnostěn určený bazí* φ. Jinak řečeno, množina K je množina všech bodů tvaru $a_0 + r^1u_1 + r^2u_2 + \cdots + r^ku_m$, kde každý z koeficientů $r^1, \ldots, r^m$ leží v intervalu $[0,1]$. Speciálním případem rovnoběžnostěnu je *úsečka*, což je rovnoběžnostěn v afinním prostoru dimenze 1 a *rovnoběžník*, což je rovnoběžnostěn v afinním prostoru dimenze 2.

Obecněji, máme-li lineárně nezávislé vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$, je $(k+1)$-tice $(u_1, u_2, \ldots, u_m, a_0)$ afinní bazí jistého afinního podprostoru $B \subseteq A$ a určuje tedy rovnoběžnostěn v B. Ten je rovněž podmnožinou afinního prostoru A a nazývá se *rovnoběžnostěn určený bodem* a_0 *a vektory* $u_1, \ldots, u_k$. Body $a_0 + r^1u_1 + r^2u_2 + \cdots + r^ku_k$, kde každý z koeficientů $r^1, \ldots, r^k$ je roven 0 nebo 1, se nazývají *vrcholy rovnoběžnostěnu* K. Rovnoběžnostěn K má 2^k vrcholů.

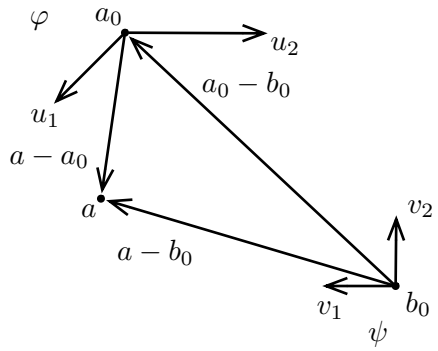
4.2 Matice přechodu mezi afinními bazemi

Mějme dvě afinní báze $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\psi = (\beta, b_0)$ afinního prostoru A dimenze m se zaměřením U. Podívejme se na následující problém: jak najít souřadnicové vyjádření bodu $a \in A$ vzhledem k bázi ψ, známe-li souřadnicové vyjádření tohoto bodu vzhledem k bázi φ? Při řešení tohoto problému můžeme předpokládat, že známe vzájemné vztahy obou bazí, tj. že známe souřadnice počátku a_0 vzhledem k bázi ψ a souřadnice vektorů vektorové báze α vzhledem k vektorové bázi β a naopak.

Zvolme tedy libovolný bod $a \in A$ a pokusme se vypočítat jeho souřadnice vzhledem k bázi ψ pomocí souřadnic vzhledem k bázi φ:

$$\begin{aligned}(a-b_0)_\beta &= (a-a_0+a_0-b_0)_\beta = (a-a_0)_\beta + (a_0-b_0)_\beta \\ &= M_{\beta,\alpha}\cdot(a-a_0)_\alpha + (a_0-b_0)_\beta. \end{aligned} \tag{4.10}$$

(Viz obr. 4.1)



Obrázek 4.1: Obrázek k matici přechodu od báze φ k bázi ψ.

Vidíme, že se nám podařilo vypočítat souřadnice bodu a vzhledem k afinní bázi ψ pomocí následujících údajů: souřadnic bodu a vzhledem k afinní bázi φ, matice přechodu od (vektorové) báze α k bázi β a souřadnic počátku a_0 vzhledem k afinní bázi ψ.

Hodnoty $M_{\beta,\alpha}$ a $(a_0 - b_0)_\beta$ přitom nezávisejí na volbě bodu a. Pokud tedy potřebujeme přepočítat souřadnice u více bodů, stačí tyto hodnoty vypočíst pouze jednou.

Nyní ještě provedeme menší trik. Uvědomme si, že $(m+1)$-tice a_ψ obsahuje ve svých prvních m složkách hodnoty m-tice $(a - b_0)_\psi$. Levá strana (4.10) je tedy souřadnicové vyjádření bodu a v afinní bázi ψ kromě posledního řádku (obsahujícího jedničku). Poslední výraz v (4.10), pokud se doplní o tento řádek (obsahující jedničku), lze zase vyjádřit jako součin jisté matice a souřadnicového vyjádření a_φ.

Konkrétně, pokud definujeme po blocích matici $M_{\psi,\varphi}$ takto:

$$M_{\psi,\varphi} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M_{\beta,\alpha} & & (a_0)_\psi \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right) \tag{4.11}$$

bude tato matice splňovat

$$a_\psi = M_{\psi,\varphi} \cdot a_\varphi. \tag{4.12}$$

(pokud vám není poslední rovnice jasná, zkuste si napsat jednoduchý příklad).

Matice $M_{\psi,\varphi}$ se nazývá *matice přechodu od afinní báze φ k afinní bázi ψ*.

Příklad 4.3. Pro libovolné tři afinní báze $\varphi, \bar{\varphi}, \varphi'$ afinního prostoru A platí

$$M_{\varphi',\bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi},\varphi} = M_{\varphi',\varphi}. \tag{4.13}$$

Příklad 4.4. Pro libovolné dvě afinní báze $\varphi, \bar{\varphi}$ afinního prostoru A dimenze m platí

$$M_{\varphi,\bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi},\varphi} = \mathrm{E}_m \tag{4.14}$$

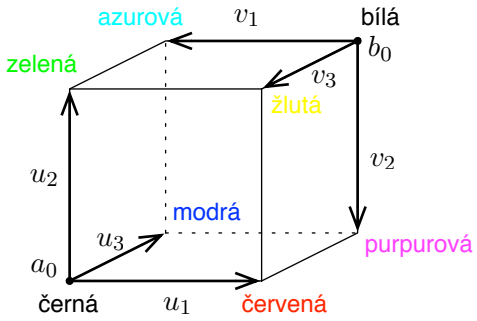
(E_m je jednotková matice).

Příklad 4.5. V počítačové grafice se standardně používají dva typy afinních bazí k popisu pixelů na monitoru. Je-li rozlišení monitoru $w \times h$, měla by báze prvního typu (používaného například v 2D grafice systému Windows) počátek v levém horním rohu obrazovky, souřadnice levého dolního rohu vzhledem k této bázi by byly $[0, h, 1]$, souřadnice pravého horního $[w, 0, 1]$ (zkrácené souřadnice tedy jsou $[0, h]$ resp. $[w, 0]$). Báze druhého typu (bližšího matematikům a používaného také v OpenGL) by měla počátek v levém dolním rohu, souřadnice levého horního by byly $[0, h, 1]$ a pravého dolního $[w, 0, 1]$. Jak by vypadala matice přechodu mezi těmito bazemi?

Příklad 4.6. Při kreslení v 3D grafice se používají tři základní afinní báze (terminologie se v různých zdrojích různí): *Báze modelu* (Model Coordinate System), *báze světa* (World Coordinate System) a *Báze pozorovatele* (View Coordinate System). Báze modelu je báze, vzhledem k níž uvádíme souřadnice vykreslovaných objektů — při zadávání bodů objektu používáme jejich souřadnice vzhledem k bázi modelu. Báze světa je obvykle pevně spojená se světem, který modelujeme. Báze pozorovatele je spojena s kamerou tak, že první vektor její vektorové báze směřuje doprava, druhý nahoru a třetí dozadu.

Matice přechodu od báze modelu k bázi světa se nazývá *matice modelu* (Model Matrix), matice přechodu od báze světa k bázi pozorovatele je *matice pozorovatele* (View Matrix). Aby systém zjistil souřadnice vykreslovaných bodů vzhledem k bázi pozorovatele, vynásobí jejich souřadnice vzhledem k bázi modelu, které jsme zadali, součinem těchto matic.

Příklad 4.7. Na obrázku 4.2 vidíme základních osm barev: bílou (anglicky white), čer-



Obrázek 4.2: Barevná krychle.

nou (black), červenou (red), zelenou (green), modrou (blue), žlutou (yellow), azurovou (cyan) a purpurovou (magenta). Barvy jsou uspořádány do vrcholů tzv. *barevné krychle*. Tuto krychli si můžeme představit jako rovnoběžnostěn v trojrozměrném afinním prostoru; body mimo ni pro nás ovšem nemají význam. Všechny barvy leží v barevné krychli. Na obrázku jsou zakresleny dvě základní afinní báze, které se používají k vyjádření barev: báze $\varphi_{RGB} = (u_1, u_2, u_3, a_0)$ a $\varphi_{CMY} = (v_1, v_2, v_3, b_0)$. Souřadnice barvy v první bázi udávají její červenou, zelenou a modrou složku (v intervalu $[0,1]$) a ve druhé pak její žlutou, azurovou a purpurovou složku. Pro příslušné matice přechodu platí (jak se lze přesvědčit)

$$M_{\varphi_{RGB},\varphi_{CMY}} = M_{\varphi_{CMY},\varphi_{RGB}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.8. Další dvě používané afinní báze na barevné krychli jsou báze φ_{YUV} a φ_{YIQ} s

následujícími maticemi přechodu:

$$M_{\varphi_{YUV},\varphi_{RGB}} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ -0.14713 & -0.28886 & 0.436 & 0.0 \\ 0.615 & -0.51499 & -0.10001 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\varphi_{RGB},\varphi_{YUV}} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.13983 & 0.0 \\ 1.0 & -0.39465 & -0.5806 & 0.0 \\ 1.0 & 2.03211 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\varphi_{YIQ},\varphi_{RGB}} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.595716 & -0.274453 & -0.321263 & 0.0 \\ 0.211456 & -0.522591 & 0.311135 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\varphi_{RGB},\varphi_{YIQ}} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.9563 & 0.6210 & 0.0 \\ 1.0 & -0.2721 & -0.6474 & 0.0 \\ 1.0 & -1.1070 & 1.7046 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Uměli byste zhruba znázornit tyto báze na barevné krychli na obrázku 4.2? Umíte vypočítat matice přechodu $M_{\varphi_{CMY},\varphi_{YUV}}, M_{\varphi_{YUV},\varphi_{CMY}}, M_{\varphi_{CMY},\varphi_{YIQ}}, M_{\varphi_{YIQ},\varphi_{CMY}}$?

Báze φ_{YUV} a φ_{YIQ} se používají ke kódování barev v televizních systémech PAL a NTSC (po řadě). Jsou postaveny na tom, že lidské oko vnímá některé odstíny citlivěji než jiné (proto některé monitory používají k zobrazení jednoho pixelu čtyři subpixely: po jednom pro červený a modrý kanál a dva pro zelený).

První souřadnice barvy v bázi φ_{YUV} i φ_{YIQ} určuje stupeň šedi (kvůli zpětné kompatibilitě s černobílými televizory) a je u obou bazí stejná. Vidíme, že k jejímu určení potřebujeme použít nadpoloviční podíl (přesně 0.587) zeleného kanálu, zatímco u modrého nám stačí 0.114.

Barevné složky v jiných modelech (HSV, HSL) se nedají zjistit pomocí žádné afinní báze v barevné krychli. Transformace mezi těmito modely a např. modelem RGB mají složitější vyjádření než pouhý součin matice a vektoru.

Příklad 4.9. Úsečka v barevné krychli s krajními body a_0 a b_0 (černá a bílá barva) je tvořena šedými barvami různých stupňů.

4.3 Body v obecné poloze

O bodech $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A$ říkáme, že jsou *v obecné poloze*, jestliže žádný z nich není afinní kombinací ostatních, čili jestliže neexistuje číslo $i \in \{0, \ldots, k\}$ a čísla $r^0, \ldots, r^{i-1}, r^{i+1}, \ldots, r^k$

tak, že $r^0+\ldots+r^{i-1}+r^{i+1}+\ldots+r^k=1$ a

$$a_i = r^0a_0+\ldots+r^{i-1}a_{i-1}+r^{i+1}a_{i+1}+\ldots+r^ka_k. \tag{4.15}$$

Následující věta ukazuje několik ekvivalentních charakteristik bodů v obecné poloze. Měly by posloužit k pochopení tohoto pojmu i jeho významu.

Věta 4.1. *Pro body $a_0,\ldots,a_k\in A$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Body $a_0,\ldots,a_k$ jsou v obecné poloze.*
2. *Vektory a_1-a_0, $a_2-a_0,\ldots,a_k-a_0$ jsou lineárně nezávislé.*
3. *Dimenze afinního obalu bodů $a_0,\ldots,a_k$ je rovna k.*
4. *Pokud pro dvě afinní kombinace bodů $a_0,\ldots,a_k$ s koeficienty $r^0,\ldots,r^k$ a $\bar r^0,\ldots,\bar r^k$ platí $r^0a_0+\cdots+r^ka_k=\bar r^0a_0+\cdots+\bar r^ka_k$, pak*

$$r^0=\bar r^0, r^1=\bar r^1,\ldots,r^k=\bar r^k. \tag{4.16}$$

Důkaz. Nejprve sporem dokážeme, že z podmínky 1 plyne podmínka 2. Předpokládejme, že vektory z podmínky 2 jsou lineárně závislé. Existují tedy čísla $r^1,\ldots,r^k$, ne všechna současně rovna nule a taková, že

$$r^1(a_1-a_0)+\cdots+r^k(a_k-a_0)=0.$$

Pro nenulový koeficient r^i (takový určitě existuje) můžeme všechny členy kromě i-tého převést na pravou stranu a rovnici podělit r^i:

$$\begin{aligned} a_i-a_0 &= \\ &= -\frac{r^1}{r^i}(a_1-a_0)-\cdots-\frac{r^{i-1}}{r^i}(a_{i-1}-a_0)-\frac{r^{i+1}}{r^i}(a_{i+1}-a_0)-\cdots-\frac{r^k}{r^i}(a_k-a_0). \end{aligned}$$

Bod a_i je tedy roven afinní kombinaci

$$a_i = da_0-\frac{r^1}{r^i}a_1-\cdots-\frac{r^{i-1}}{r^i}a_{i-1}-\frac{r^{i+1}}{r^i}a_{i+1}-\cdots-\frac{r^k}{r^i}a_k,$$

kde

$$d=1+\frac{r^1}{r^i}+\cdots+\frac{r^{i-1}}{r^i}+\frac{r^{i+1}}{r^i}+\cdots+\frac{r^k}{r^i}$$

(viz úlohu 3.4). Tak se nám podařilo vyjádřit bod a_i jako afinní kombinaci ostatních bodů a dospět ke sporu s podmínkou 1.

Nyní z podmínky 2 odvodíme podmínku 4 (podmínku 3 zatím vynecháme). Podle definice afinní kombinace je rovnost $r^0a_0+\cdots+r^ka_k=\bar r^0a_0+\cdots+\bar r^ka_k$ ekvivalentní rovnosti

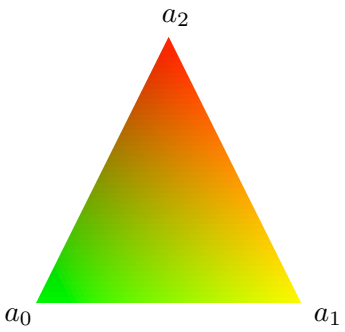
$$r^1(a_1-a_0)+\cdots+r^k(a_k-a_0)=\bar r^1(a_1-a_0)+\cdots+\bar r^k(a_k-a_0).$$

Z lineární nezávislosti vektorů $a_1 - a_0$, ..., $a_k - a_0$ nyní plyne rovnost koeficientů z podmínky 4.

K odvození podmínky 1 z podmínky 4 si stačí uvědomit, že ve vztahu (4.15) na levé i pravé straně vystupuje afinní kombinace bodů $a_0, \ldots, a_k$. Tyto afinní kombinace mají různé koeficienty, protože na levé straně je u bodu a_i koeficient 1, zatímco na straně pravé 0. Proto z podmínky 4 plyne, že body jsou v obecné poloze.

Nyní dokážeme, že podmínka 3 je ekvivalentní podmínce 2. Podle Věty 3.3 je zaměření afinního obalu $\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \ldots, a_k\})$ rovno lineárnímu obalu vektorů $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$, jehož dimenze je rovna k právě když jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

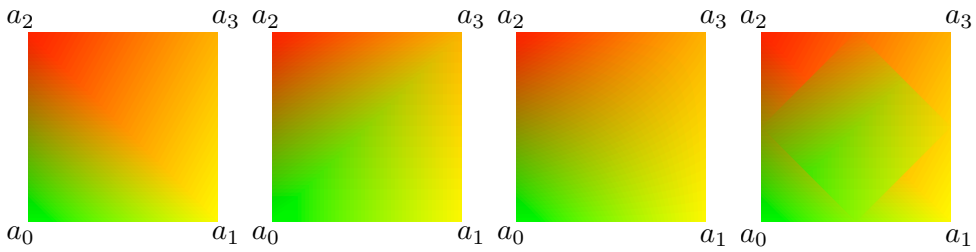
Příklad 4.10. Vrcholy trojúhelníka na obr. 4.3 jsou v obecné poloze. Podle Věty 4.1 lze tedy libovolný bod roviny vyjádřit nejvýše jedním způsobem jako jejich afinní kombinaci. Abychom to ukázali, obarvili jsme každý vrchol jednou barvou: bod a_0 zelenou, a_1 žlutou a a_2 červenou. Zkrácené souřadnice těchto barev v bázi φ_{RGB} (příklad 4.7) jsou po řadě $[0,1,0]$, $[1,1,0]$ a $[1,0,0]$. Každý bod uvnitř trojúhelníka jsme obarvili afinní kombinací těchto barev (v barevné krychli) se stejnými koeficienty, s jakými lze bod vyjádřit afinní kombinací vrcholů. Pokud tedy pro bod a v trojúhelníku platí $a = r^0 a_0 + r^1 a_1 + r^2 a_2$ (afinní kombinace), obarvili jsme jej barvou $r^0 b_0 + r^1 b_1 + r^2 b_2$ (afinní kombinace barev v barevné krychli), kde b_0 je zelená, b_1 žlutá a b_2 červená. Koeficienty r^0, r^1 a r^2 jsou jednoznačně určeny, lze to tedy udělat jediným způsobem. Na obr. 4.3 vidíme výsledek.



Obrázek 4.3: Jediné možné obarvení trojúhelníka, jsou-li dány barvy vrcholů a ostatní body se obarvují podle koeficientů, s jakými jsou afinní kombinací vrcholů.

Příklad 4.11. Vrcholy čtverce na obr. 4.4 nejsou v obecné poloze. Proto lze čtverec stejným principem jako v předchozím příkladě obarvit mnoha způsoby. Čtvrtá barva je oranžová (zkrácené souřadnice v bázi φ_{RGB} jsou $[1; 0,6470585; 0]$). První čtverec je obarven tak, že trojúhelník určený body a_0, a_1, a_2 a trojúhelník určený body a_1, a_2, a_3 jsou obarveny podle principu z Př. 4.10 (v prvním trojúhelníku tedy není vůbec použita oranžová barva a ve druhém zelená). Podobně je obarven druhý čtverec s použitím trojúhelníků a_0, a_1, a_3 a

a_0, a_2, a_3. U třetího čtverce je každý bod uvnitř čtverce vyjádřen jako afinní kombinace všech čtyř vrcholů se všemi čtyřmi koeficienty nenulovými (detaily zde neuvádíme). U čtvrtého čtverce jsme na část bodů použili výpočet pro první a na zbytek výpočet pro druhý čtverec.



Obrázek 4.4: Různá obarvení bodů čtverce podle koeficientů afinních kombinací vrcholů.

4.4 Bodové báze a barycentrické souřadnice

Na závěr kapitoly se ještě stručně zmíníme o bodových bazích a barycentrických souřadnicích. Je-li dimenze afinního prostoru A rovna m a body $a_0, \ldots, a_m \in A$ jsou v obecné poloze, pak se $(m+1)$-tice $(a_0, \ldots, a_m)$ nazývá *bodová báze* afinního prostoru A.

Z Věty 4.1 plyne, že je-li $\varphi = (a_0, \ldots, a_m)$ bodová báze A, pak pro každý bod $a \in A$ existuje právě jedna $(m+1)$-tice čísel $r^0, \ldots, r^m$, jejichž součet je roven jedné a

$$a = r^0 a_0 + \cdots + r^n a_m. \tag{4.17}$$

$(n+1)$-tice $[r^0, \ldots, r^n]$ (píšeme do hranatých závorek a do sloupce) se nazývá *barycentrickými souřadnicemi bodu a vzhledem k bodové bázi φ*. Zavádíme označení $[r^0, \ldots, r^m] = [a^0_\varphi, \ldots, a^m_\varphi] = a_\varphi$.

Mějme dvě bodové báze afinního prostoru A: $\varphi = (a_0, \ldots, a_m)$, $\bar{\varphi} = (\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_m)$. Matici

$$M_{\bar{\varphi},\varphi} = \begin{pmatrix} (a_0)^0_{\bar{\varphi}} & (a_1)^0_{\bar{\varphi}} & \cdots & (a_m)^0_{\bar{\varphi}} \\ (a_0)^1_{\bar{\varphi}} & (a_1)^1_{\bar{\varphi}} & \cdots & (a_m)^1_{\bar{\varphi}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_0)^m_{\bar{\varphi}} & (a_1)^m_{\bar{\varphi}} & \cdots & (a_m)^m_{\bar{\varphi}} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

nazýváme *maticí přechodu od bodové báze φ k bodové bázi $\bar{\varphi}$*.

Matice přechodu od bodové báze φ k bodové bázi $\bar{\varphi}$ vznikne tak, že do sloupců zapíšeme souřadnice jednotlivých prvků bodové báze φ vzhledem k bodové bázi $\bar{\varphi}$ — tedy stejným postupem, jakým vzniká matice přechodu mezi dvěma bázemi vektorového prostoru.

Součet prvků každého sloupce v matici přechodu mezi bodovými bazemi je roven jedné.

Věta 4.2. *Pro libovolné dvě bodové báze φ, $\bar{\varphi}$ afinního prostoru A a bod $a \in A$ platí*

$$a_{\bar{\varphi}} = M_{\bar{\varphi},\varphi} \cdot a_{\varphi}. \tag{4.19}$$

Příklad 4.12. Pro libovolné tři bodové báze $\varphi, \bar{\varphi}, \varphi'$ afinního prostoru A platí

$$M_{\varphi',\bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi},\varphi} = M_{\varphi',\varphi}. \tag{4.20}$$

Příklad 4.13. Pro libovolné dvě bodové báze $\varphi, \bar{\varphi}$ afinního prostoru A platí

$$M_{\varphi,\bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi},\varphi} = \mathrm{E}_m \tag{4.21}$$

(E_m je jednotková matice).

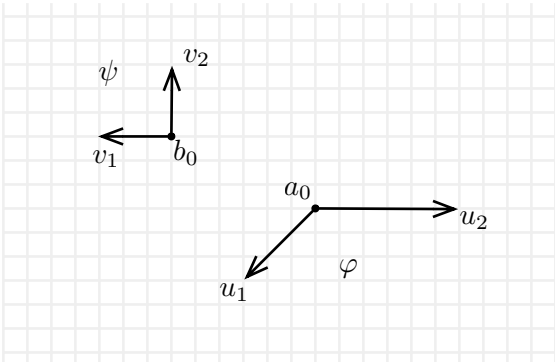
Mějme body $a_0, a_1, \ldots, a_m \in A$ a označme $u_1 = a_1 - a_0, u_2 = a_2 - a_0, \ldots, u_m = a_m - a_0$. Z Věty 4.1 plyne, že $(m+1)$-tice $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ je bodová báze právě když $(m+1)$-tice $(u_1, u_2, \ldots, u_m, a_0)$ je báze afinní. Tyto dvě báze (jednu bodovou, druhou afinní) nazýváme *asociované*.

ÚLOHY KE KAPITOLE 4

4.1. V afinním prostoru R^2 mají vzhledem k afinní bázi φ body $[1,1]$, $[1,2]$ a $[-1,1]$ souřadnice (po řadě) $[0,1,1]$, $[0,-1,1]$ a $[-2,-1,1]$. Najděte afinní bázi φ.

4.2. Lze změnit číselné údaje v zadání předchozí úlohy tak, aby neměla řešení?

4.3. Napište matici přechodu od afinní báze φ k afinní bázi ψ, které jsou zadány obrázkem 4.5.



Obrázek 4.5: Dvě afinní báze.

4.4. Napište matici přechodu od afinní báze $\varphi = (u_1, u_2, a_0)$ k afinní bázi $\bar{\varphi} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{a}_0)$ afinního prostoru $\mathbf{R}^2$, je-li

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{a}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.5. Rozhodněte, zda existují dvě afinní báze φ a φ' afinní roviny A tak, že matice přechodu $M_{\varphi',\varphi}$ je rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Vraťme se k příkladu 4.5 a označme první afinní bázi φ a druhou φ'. Dále definujme novou bázi $\psi = (v_1, v_2, b_0)$, kde b_0 je bod ve středu obrazovky, v_1 svislý vektor takový, že bod $b_0 + v_1$ leží na jejím horním okraji a v_2 vodorovný vektor takový, že bod $b_0 + v_2$ leží na jejím pravém okraji (pojmy „svislý“ a „vodorovný“ nedefinujeme, ale jsou zřejmé z kontextu). Najděte matice $M_{\psi,\varphi}$, $M_{\psi,\varphi'}$, $M_{\varphi,\psi}$, $M_{\varphi',\psi}$.

4.7. Máme dvojrozměrný afinní prostor A s afinní bazí φ. Napište v bázi φ parametrickou rovnici přímky procházející body o zkrácených souřadnicích $[1,2]$, $[-1,3]$.

4.8. Napište parametrickou rovnici afinního obalu množiny $\{a,b,c\}$ v afinní bázi φ, jestliže (ve zkráceném souřadnicovém vyjádření)

1. $a_\varphi = [1,1,0]$, $b_\varphi = [-1,2,1]$, $c_\varphi = [0,-1,-1]$,
2. $a_\varphi = [1,2,0]$, $b_\varphi = [-1,2,2]$, $c_\varphi = [2,2,-1]$.

4.9. Pro oba afinní podprostory z úlohy 4.8 rozhodněte, zda obsahují bod d, jestliže

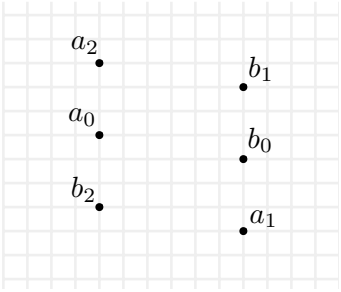
1. $d_\varphi = [0,2,1]$,
2. $d_\varphi = [0,3,2]$.

4.10. Máme afinní bázi ψ afinního prostoru z úlohy 4.8 s maticí přechodu

$$M_{\psi,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Napište parametrické rovnice podprostorů z příkladu 4.8 v bázi ψ.

4.11. Ověřte nebo vyvraťte každou ze čtyř podmínek Věty 4.1 pro obě trojice bodů a,b,c z úlohy 4.8.



Obrázek 4.6: Dvě bodové báze

4.12. K vykreslení trojúhelníka na obrázku 4.3 bylo třeba pro každý bod a uvnitř trojúhelníka zjistit koeficienty afinní kombinace $a = r^0 a_0 + r^1 a_1 + r^2 a_2$. Jak to udělat, známe-li souřadnice bodu a vzhledem k afinní bázi φ, pro kterou platí $(a_0)_\varphi = [0,0,1]$, $(a_1)_\varphi = [1000,0,1]$ a $(a_2)_\varphi = [500,1000,1]$? (Tuto úlohu jsem při kreslení trojúhelníka skutečně řešil.)

4.13. Zdůvodněte, že body a_0, a_1, a_2 z obr. 4.6 jsou v obecné poloze. Použijte na to definici a postupně každou z podmínek 2, 3, 4 Věty 4.1.

4.14. Najděte matici přechodu od bodové báze $\varphi = (a_0, a_1, a_2)$ k bodové bázi $\psi = (b_0, b_1, b_2)$. Báze jsou zadány obrázkem 4.6.

4.15. Mějme bodovou bázi $\varphi = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ afinního prostoru A a permutaci $p\colon \{0,1,\ldots,m\} \to \{0,1,\ldots,m\}$. Dokažte, že $(m+1)$-tice $\varphi = (a_{p(0)}, a_{p(1)}, \ldots, a_{p(m)})$ je rovněž bodová báze. Čemu je roven determinant $\det M_{\varphi,\psi}$? Na tuto úlohu si vzpomeňte, až budete číst podkapitolu 9.1.

4.16. Mějme bodovou bázi $\varphi = (a_0, a_1, a_2)$ dvojrozměrného afinního prostoru A a s ní asociovanou afinní bázi $\psi = (a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_0)$. Najděte matici $M_{\psi,\varphi}$ takovou, aby pro všechny body $a \in A$ platilo $a_\psi = M_{\psi,\varphi} \cdot a_\varphi$. Čemu je roven její determinant?

Kapitola 5

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení jsou zobrazení afinních prostorů, která respektují jejich strukturu. Mezi afinní zobrazení patří mnohá zobrazení, která se používají v počítačové grafice: posunutí, změna měřítka apod., jak v dvojrozměrném, tak trojrozměrném prostoru. Dále také rovnoběžné promítání (například trojrozměrného prostoru na obrazovku počítače).

K popisu afinních zobrazení slouží jejich matice vzhledem k afinním bazím. Při realizaci afinních zobrazení na počítači (například v OpenGL) se pracuje s jejich maticemi.

V této kapitole budeme pracovat s afinními prostory A a B se zaměřeními (po řadě) U a V.

5.1 Definice a příklady afinních zobrazení

Zobrazení $f: A \to B$ afinních prostorů A a B se nazývá *afinní*, jestliže pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a libovolnou jejich afinní kombinaci $r^1 a_1 + r^2 a_2$ platí

$$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2). \tag{5.1}$$

Pro připomenutí pojmu afinní kombinace bodů si přečtěte začátek kapitoly 3.1. Zejména si uvědomte, že $r^1 + r^2 = 1$.

Příklad 5.1. Podle příkladu 3.2 plyne z podmínky (5.1) její zobecnění na libovolný počet bodů:

$$f(r^0 a_0 + r^1 a_1 + \cdots + r^k a_k) = r^0 f(a_0) + r^1 f(a_1) + \cdots + r^k f(a_k). \tag{5.2}$$

Součet koeficientů $r^0, r^1, \ldots, r^k$ je opět roven jedné.

Příklad 5.2. Pro libovolný bod $b_0 \in B$ je zobrazení $f: A \to B$, definované předpisem $f(a) = b_0$ (tj. konstantní zobrazení), afinní. Pro toto zobrazení je totiž levá strana vztahu (5.1) rovna $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = b_0$ a pravá $r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2) = r^1 b_0 + r^2 b_0 = b_0$.

Příklad 5.3. Jak víme, identické zobrazení (identita) na množině X je zobrazení Id_X takové, že $\mathrm{Id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$. Identita na afinním prostoru A je afinní zobrazení. Důkaz přenecháme čtenáři.

Příklad 5.4. Zobecnění předchozího příkladu: je-li $Y \subseteq X$, pak kanonické vložení množiny Y do X je zobrazení $\mathrm{i}_Y : Y \to X$, definované předpisem $\mathrm{i}_Y(y) = y$. Množina $B \subseteq A$ je afinním podprostorem afinního prostoru A, právě když je kanonické vložení $\mathrm{i}_B : B \to A$ afinní zobrazení.

Afinní zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v prvcích bodové báze. Podrobněji: pokud $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ je bodová báze afinního prostoru A, pak libovolný bod $a \in A$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinací jejích prvků:

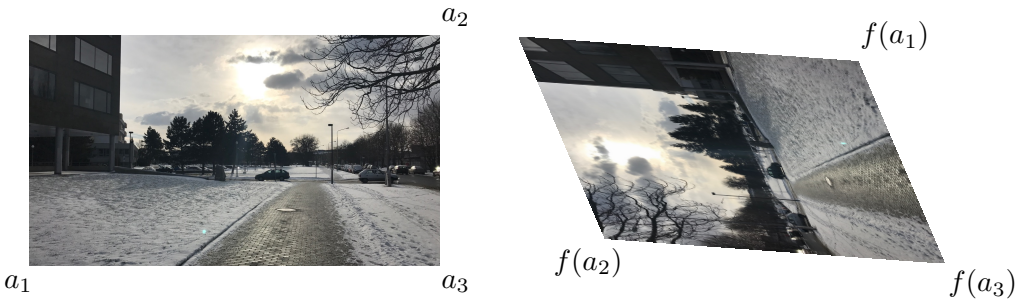
$$a = r^0 a_0 + r^1 a_1 + \cdots + r^m a_m.$$

Podle příkladu 5.1 tedy

$$f(a) = f(r^0 a_0 + r^1 a_1 + \cdots + r^m a_m) = r^0 f(a_0) + r^1 f(a_1) + \cdots + r^m f(a_m),$$

což ukazuje, že hodnota $f(a)$ závisí (kromě bodu a) pouze na hodnotách $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_m)$. Tento poznatek je dobré si zapamatovat.

Příklad 5.5. Princip je ilustrován na obrázku 5.1. Afinní zobrazení f dvou afinních prostorů dimenze 2 zobrazuje body a_1, a_2, a_3 na body $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$. Obrazy ostatních bodů už jsou jednoznačně určeny. Proto bylo možné na základě znalosti obrazů bodů a_1, a_2, a_3 transformovat celou fotografii.



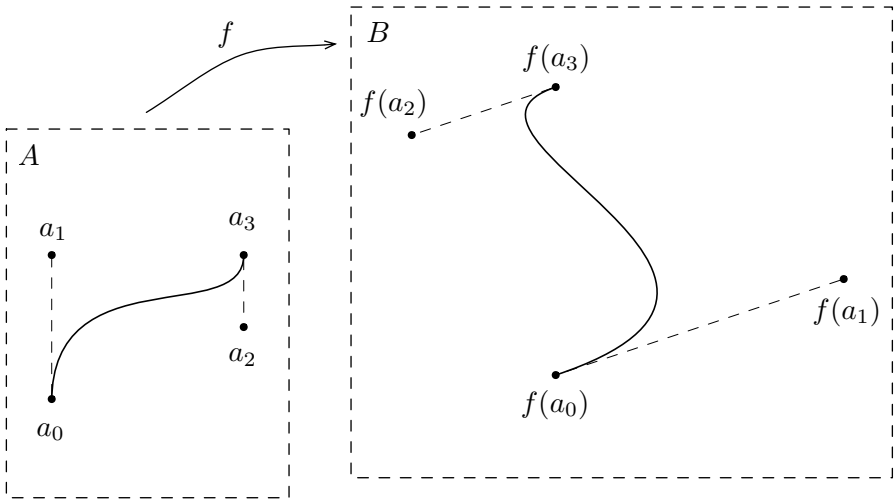
Obrázek 5.1: Obrazy bodů a_1, a_2, a_3 při afinním zobrazení f jednoznačně určují, jak se zobrazí všechny ostatní body.

Příklad 5.6. V příkladu 3.4 jsme řekli, že body Bézierovy křivky můžeme jednoznačně vypočítat jako jisté afinní kombinace jejích řídicích bodů. Uvažme kubickou Bézierovu

křivku v afinním prostoru A s řídicími body a_0, a_1, a_2, a_3. Její bod b_t pro $t \in [0,1]$ je dán vztahem (3.4). Dále uvažme afinní zobrazení $f : A \to B$. Podle (5.1) platí

$$\begin{aligned} f(b_t) &= f(t^3 a_0 + 3t^2(1-t)a_1 + 3t(1-t)^2 a_2 + (1-t)^3 a_3) \\ &= t^3 f(a_0) + 3t^2(1-t)f(a_1) + 3t(1-t)^2 f(a_2) + (1-t)^3 f(a_3). \end{aligned}$$

Obraz křivky při zobrazení f je tedy jednoznačně určen obrazy bodů a_0, a_1, a_2, a_3: je to kubická Bézierova křivka s řídicími body $f(a_0), f(a_1), f(a_2), f(a_3)$. Chceme-li zobrazit Bézierovu křivku afinním zobrazením, stačí tedy zobrazit její řídicí body a výslednou křivku z nich dopočítat v cílovém afinním prostoru (obr. 5.2).



Obrázek 5.2: Obraz Bézierovy křivky je jednoznačně určen obrazy jejích řídicích bodů.

Věta 5.1. *Kompozice dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení.*

Důkaz. Mějme dvě afinní zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Ověříme, že kompozice $g \circ f$ je afinní zobrazení[1]. Na obě zobrazení f a g můžeme použít (5.1), takže pro libovolné body $a_1, a_2 \in A$ a čísla r^1, r^2 $(r^1 + r^2 = 1)$ máme

$$\begin{aligned} (g \circ f)(r^1 a_1 + r^2 a_2) &= g(f(r^1 a_1 + r^2 a_2)) = g(r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)) \\ &= r^1 g(f(a_1)) + r^2 g(f(a_2)) = r^1 (g \circ f)(a_1) + r^2 (g \circ f)(a_2), \end{aligned}$$

což dokazuje, že zobrazení $g \circ f$ je afinní.

[1] Složené zobrazení (kompozice) $g \circ f$ (čteme *g po f*) je zobrazení, definované předpisem $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Pozor na pořadí.

Věta 5.2. *Mějme afinní zobrazení $f : A \to B$ a afinní podprostory $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Pak množina $f(C) \subseteq B$ je afinní podprostor afinního prostoru B a pokud množina $f^{-1}(D)$ je neprázdná, je afinním podprostorem afinního prostoru A.*

Důkaz. Dokážeme první část a druhou necháme čtenáři jako cvičení. Máme dokázat, že množina $f(C)$ je afinním podprostorem afinního prostoru B. Použijeme na to výsledek úlohy 3.13. Zvolíme libovolně dva body $b_1, b_2 \in f(C)$ a koeficienty $r^1, r^2 \in \mathrm{R}$, $r^1 + r^2 = 1$ a dokážeme, že afinní kombinace $r^1 b_1 + r^2 b_2$ leží v $f(C)$.

Jelikož body b_1 a b_2 leží v obrazu podprostoru C při zobrazení f, existují body $a_1, a_2 \in C$ takové, že $f(a_1) = b_1$ a $f(a_2) = b_2$. Dále, jelikož C je afinní podprostor, platí $r^1 a_1 + r^2 a_2 \in C$, a tedy bod $f(r^1 a_1 + r^2 a_2)$ leží v $f(C)$. Zobrazení f je ovšem afinní, takže podle definice $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2) = r^1 b_1 + r^2 b_2$. Tím jsme dokázali, že bod $r^1 b_1 + r^2 b_2$ leží v C, což je přesně to, co jsme potřebovali.

Afinní zobrazení $f : A \to A$ se nazývá *afinní transformace afinního prostoru A*. *Afinní projekce na podprostor afinního prostoru A* je taková afinní transformace $f : A \to A$, že pro každé $a \in A$ platí $f(f(a)) = f(a)$. Smyslem této podmínky je, že projekce na podprostor se v bodech množiny $f(A)$ (která je afinním podprostorem, jak víme z předchozí věty) chová jako identita: pro libovolný bod $b \in f(A)$ platí $f(b) = b$. Zobrazení f tedy zobrazuje body podprostoru $f(A)$ na tytéž body. Je to vskutku tak: ke každému bodu $b \in f(A)$ existuje bod $a \in A$ takový, že $b = f(a)$, a tedy platí $f(b) = f(f(a)) = f(a) = b$. Obecněji každému surjektivnímu afinnímu zobrazení $f : A \to B$ říkáme *afinní projekce*.

Příklad 5.7. Příkladem afinní transformace afinního prostoru A je *posunutí o vektor* $u_0 \in U$, což je zobrazení $\mathrm{tr}_{u_0} : A \to A$ (tr jako *translace*), definované předpisem

$$\mathrm{tr}_{u_0}(a) = a + u_0. \tag{5.3}$$

Je užitečné zkusit si podrobně dokázat, že opravdu jde o afinní transformaci. Identita (příklad 5.3) je rovněž afinní transformace. Je to posunutí o nulový vektor.

Příklad 5.8. Příkladem afinní projekce na podprostor je libovolné konstantní zobrazení $f : A \to A$, jak se lze snadno přesvědčit. Později se setkáme s dalšími příklady.

5.2 Podřízené lineární zobrazení

Věta 5.3. *Mějme afinní zobrazení $f : A \to B$. Pokud pro čtyři body $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ platí $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$, pak $f(a_2) - f(a_1) = f(a_4) - f(a_3)$.*

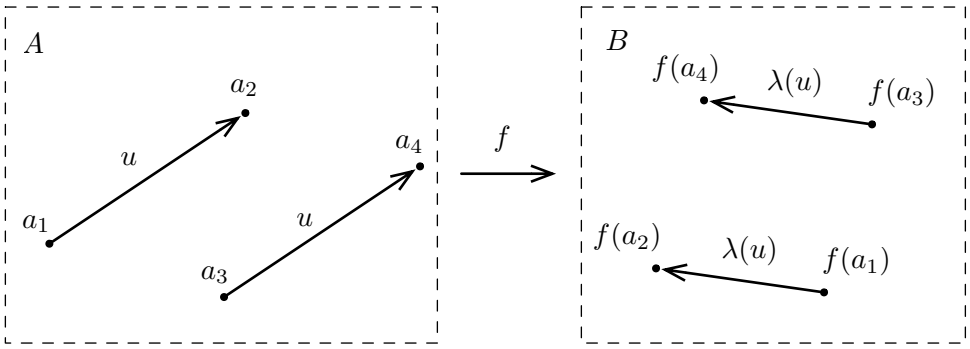
Důkaz. Z předpokladu věty plyne, že $a_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$. Podle příkladu 3.3 platí $a_4 = a_3 + a_2 - a_1$, kde na pravé straně stojí bodová kombinace bodů a_3, a_2, a_1 s koeficienty 1, 1 a -1. Podle příkladu 5.1 tedy $f(a_4) = f(a_3) + f(a_2) - f(a_1)$, neboli, opět podle příkladu 3.3, $f(a_4) = f(a_3) + (f(a_2) - f(a_1))$ (součet bodu a vektoru). Odtud tvrzení věty.

Označíme-li ve větě 5.3 vektor $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$ písmenem u, dostaneme $f(a_1 + u) - f(a_1) = f(a_3 + u) - f(a_3)$. Vektor

$$\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0) \tag{5.4}$$

z vektorového prostoru V tedy nezávisí na volbě bodu $a_0 \in A$, ale pouze na vektoru $u \in U$. Předpis (5.4) tedy definuje zobrazení $\lambda : U \to V$.

Obrázek 5.3 zachycuje popsanou situaci. Vidíme na něm body a_1, a_2, a_3, a_4 afinního



Obrázek 5.3: Afinní zobrazení a podřízené lineární zobrazení.

prostoru A takové, že $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$. Obrázek ukazuje, jak by mohly vypadat obrazy těchto bodů v afinním zobrazení f: vektory $f(a_2) - f(a_1)$ a $f(a_4) - f(a_3)$ se rovnají, takže lze definovat zobrazení λ.

Zobrazení $\lambda : U \to V$ definované předpisem (5.4) se nazývá *zobrazení podřízené afinnímu zobrazení* f.

Příklad 5.9. Podřízené zobrazení k zobrazení tr_{u_0} z příkladu 5.7 je identita.

Přepsání vztahu (5.4) do tvaru

$$f(a_0 + u) = f(a_0) + \lambda(u) \tag{5.5}$$

ukazuje, že ke zjištění hodnoty afinního zobrazení f v bodě $a_0 + u$ stačí znát jeho hodnotu v bodě a_0 a hodnotu podřízeného zobrazení ve vektoru u. Pokud označíme $a_0 + u = a$, dostaneme jinou verzi tohoto vztahu,

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0), \tag{5.6}$$

která říká, jak vypočíst hodnotu afinního zobrazení f v libovolném bodě a, pokud známe jeho hodnotu v bodě a_0 a umíme vypočítat hodnotu podřízeného zobrazení ve vektoru $a - a_0$.

(5.5) a (5.6) jsou (kromě základních vlastností matic afinních zobrazení z následující podkapitoly) nejčastěji používané vztahy pro afinní zobrazení. Umožňují řešit problémy kolem afinních zobrazení pomocí jejich podřízených zobrazení, což je výhodné díky následující větě, která říká, že podřízené zobrazení je vždy lineární, a Větě 5.5, která říká, že afinní zobrazení jsou právě zobrazení popsatelná těmito vztahy. Pracovat s afinními zobrazeními na základě definice, bez pomoci podřízených zobrazení, by bylo mnohem obtížnější.

Věta 5.4. *Podřízené zobrazení libovolného afinního zobrazení je lineární.*

Důkaz. Mějme afinní zobrazení $f: A \to B$ a jeho podřízené zobrazení $\lambda: U \to V$. Podle (5.4) pro libovolné skaláry $r^1, r^2 \in R$, vektory $u_1, u_2 \in U$ a bod $a_0 \in A$ máme

$$\lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) = f(a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2) - f(a_0).$$

Označme $a_0 + u_1 = b_1$, $a_0 + u_2 = b_2$. Bod $a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2$ je roven afinní kombinaci $(1 - r^1 - r^2)a_0 + r^1 b_1 + r^2 b_2$ (viz úlohu 3.4), takže

$$\begin{aligned} f(a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2) &= f((1 - r^1 - r^2)a_0 + r^1 b_1 + r^2 b_2) \\ &= (1 - r^1 - r^2) f(a_0) + r^1 f(b_1) + r^2 f(b_2). \end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že $f(b_1) = f(a_0) + \lambda(u_1)$ a $f(b_2) = f(a_0) + \lambda(u_2)$. Proto se (opět podle úlohy 3.4) poslední výraz rovná

$$f(a_0) + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2).$$

Když se vrátíme k začátku důkazu, dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) &= f(a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2) - f(a_0) \\ &= f(a_0) + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) - f(a_0) \\ &= r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2). \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že zobrazení λ je opravdu lineární.

Věta 5.5. *Pro libovolné dva body $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ a lineární zobrazení $\lambda: U \to V$ existuje právě jedno afinní zobrazení $f: A \to B$ takové, že $f(a_0) = b_0$ a λ je podřízené zobrazení zobrazení f.*

Důkaz. Ze vztahu (5.6) plyne, že je-li dána hodnota zobrazení f v bodě a_0 a podřízené zobrazení λ, jsou hodnoty zobrazení f ve všech ostatních bodech afinního prostoru A jednoznačně určeny. Zobrazení f daných vlastností tedy existuje nejvýše jedno a pokud existuje, je dáno vztahem (5.6).

Je tedy třeba dokázat, že zobrazení f dané tímto vztahem je afinní a jeho podřízené zobrazení je λ. Zvolme tedy libovolně dva body $a_1, a_2 \in A$ a čísla $r^1, r^2 \in R$ taková, že $r^1 + r^2 = 1$. Dále označme $a_1 - a_0 = u_1$, $a_2 - a_0 = u_2$. Podle vztahu (5.6) máme

$$\begin{aligned} f(r^1 a_1 + r^2 a_2) &= b_0 + \lambda(r^1 a_1 + r^2 a_2 - a_0) \\ &= b_0 + \lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) \\ &= b_0 + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) \\ &= r^1 \lambda(a_1) + r^2 \lambda(a_2). \end{aligned}$$

f je tedy afinní zobrazení. Hodnota jeho podřízeného zobrazení ve vektoru $u \in U$ je podle (5.1) rovna

$$f(a_0 + u) - f(a_0) = f(a_0) + \lambda(u) - f(a_0) = \lambda(u).$$

Zobrazení λ je tedy podřízeným zobrazením afinního zobrazení f.

Příklad 5.10. *Středová souměrnost se středem* $a_0 \in A$ je zobrazení $f : A \to A$ definované předpisem

$$f(a) = 2a_0 - a$$

(na pravé straně je afinní kombinace, kterou lze také přepsat jako součet bodu a vektoru: $f(a) = a_0 + (a_0 - a)$). Středová souměrnost je afinní transformace afinního prostoru A. To lze odvodit přímo z definice afinního zobrazení (obtížnější), nebo pomocí Věty 5.5 (jednodušší). Podřízené lineární zobrazení středové souměrnosti je $\lambda(u) = -u$.

Příklad 5.11. Zajímavý příklad středové souměrnosti lze ukázat na barevné krychli (příklad 4.7). Položme $d = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0$ (bod d leží ve středu úsečky s koncovými body v černé a bílé barvě). Pro $a \in A$ položme $f(a) = 2d - a$ (středová souměrnost se středem d). Zobrazení f přiřadí každé barvě její doplňkovou barvu. Na obrázku 5.4 je barva každého pixelu na pixmapě vpravo výsledkem aplikace zobrazení f na barvu příslušného pixelu na pixmapě vlevo.

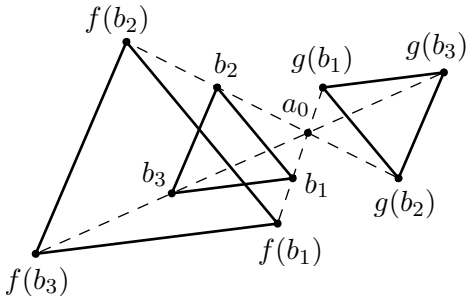
Obrázek 5.4: Doplňkové barvy

Příklad 5.12. Afinní zobrazení z příkladu 5.10 můžeme zobecnit, když afinní kombinaci $2a_0 - a$ nahradíme obecnou afinní kombinací dvou bodů:

$$f(a) = (1-k)a_0 + ka.$$

Přepsáno jako součet bodu a vektoru: $f(a) = a_0 + k(a - a_0)$. Zobrazení f se pak nazývá *stejnolehlost se středem a_0 a koeficientem k*. Pro $k = 0$ je f konstantní zobrazení, pro $k = 1$ identita. Pro $k = -1$ je stejnolehlost f středovou souměrností se středem a_0.

Na obrázku 5.5 je znázorněna stejnolehlost f se středem a_0 a koeficientem $c = 2$ a středová souměrnost g s tímtéž středem.



Obrázek 5.5: Stejnolehlost f s koeficientem $k = 2$ a g s koeficientem $k = -1$ (tj. středová souměrnost).

ÚLOHY KE KAPITOLE 5

5.1. Dokažte druhou část Věty 5.2.

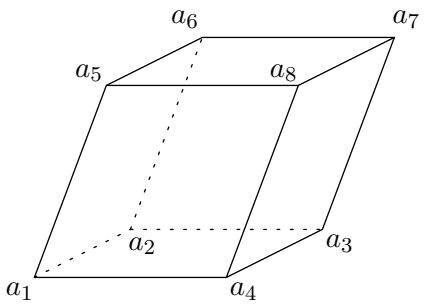
5.2. Které z funkcí z úlohy 1.14 jsou afinní zobrazení z R do R?

5.3. Pro libovolná dvě afinní zobrazení $f, g : A \to B$ a číslo t je zobrazení $tf + (1-t)g$, které zobrazí každý bod $a \in A$ na afinní kombinaci

$$tf(a) + (1-t)g(a),$$

afinní zobrazení. Dokažte.

5.4. V trojrozměrném afinním prostoru A je dán rovnoběžnostěn s vrcholy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 (viz obrázek 5.6) a afinní zobrazení $f : A \to A$ takové, že $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_5$, $f(a_5) = a_4$, $f(a_4) = a_8$. Najděte obrazy všech vrcholů rovnoběžnostěnu při zobrazení f a obrazy vektorů $a_7 - a_6$ a $a_7 - a_5$ v podřízeném lineárním zobrazení.



Obrázek 5.6: Obrázek k úloze 5.4.

5.5. Rovnoběžnostěn z úlohy 5.4 zobrazíme afinním zobrazením f na obrazovku počítače, kterou chápeme jako část dvourozměrného afinního prostoru B. Bod a_1 se zobrazí do levého dolního rohu obrazovky, bod a_7 do pravého horního rohu, bod a_5 někam na levý okraj, bod a_4 někam na dolní okraj a body a_2 a a_8 se zobrazí do téhož bodu (zdánlivě splynou). Je zobrazení f těmito podmínkami určeno jednoznačně? Kam se zobrazí body $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8$?

5.6. V afinním prostoru A jsou dány body a_1 a a_2 a vektor u_0. Afinní transformace f, g, h afinního prostoru A jsou (po řadě) středová souměrnost se středem a_1, středová souměrnost se středem a_2 a posunutí o vektor u_0. Rozhodněte, zda složené zobrazení $g \circ f$ je

1. posunutí. Pokud ano, zjistěte, o jaký vektor.
2. středová souměrnost. Pokud ano, zjistěte, s jakým středem.

Totéž proveďte pro složené zobrazení $g \circ h$.

5.7. Je možné vyjádřit stejnolehlost s koeficientem 2 jako kompozici středových souměrností a posunutí?

5.8. Je možné vždy vyjádřit bijektivní afinní transformaci jako kompozici stejnolehlostí a posunutí?

5.9. Kolik existuje bijektivních afinních projekcí na podprostor $f : A \to A$?

5.10. Mějme afinní bázi $(u_1, u_2, \ldots, u_m, a_0)$ afinního prostoru A. Ukažte, že pro afinní zobrazení $f : A \to B$ s podřízeným zobrazením λ je $(\lambda(u_1), \lambda(u_2), \ldots, \lambda(u_m), f(a_0))$ afinní báze afinního prostoru B, právě když f je bijekce.

5.11. Mějme afinní zobrazení $f : A \to B$ a body $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A$. Dokažte nebo vyvraťte:

1. Jsou-li body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ v obecné poloze, jsou i body $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)$ v obecné poloze.
2. Jsou-li body $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)$ v obecné poloze, jsou i body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ v obecné poloze.
3. Generují-li body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ prostor A, generují body $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)$ prostor B.
4. Generují-li body $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)$ prostor B, generují body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ prostor A.

Kapitola 6

Vlastnosti afinních zobrazení

6.1 Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím

Mějme afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$ afinního prostoru A se zaměřením U a afinní bázi $\psi = (\beta, b_0)$, $\beta = (v_1, \ldots, v_n)$ afinního prostoru B se zaměřením V. Dále mějme afinní zobrazení $f : A \to B$ s podřízeným lineárním zobrazením $\lambda : U \to V$. Naším cílem je najít způsob, jak ze souřadnicového vyjádření a_φ bodu $a \in A$ vzhledem k bázi φ vypočítat souřadnicové vyjádření $f(a)_\psi$ jeho obrazu $f(a)$ při zobrazení f vzhledem k bázi ψ.

Máme

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0),$$

čili podle (4.8) a s použitím matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ lineárního zobrazení λ vzhledem k bazím α, β,

$$\begin{aligned} f(a)_\psi &= \lambda(a - a_0)_\psi + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot (a - a_0)_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_0)_\psi \\ &= \left(\begin{array}{c} \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \\ \hline 0 \quad \cdots \quad 0 \end{array}\right) \cdot (a - a_0)_\alpha + f(a_0)_\psi. \end{aligned}$$

Pokud nyní sestavíme blokovou matici

$$\mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} & f(a_0)_\psi \\ \hline 0 \quad \cdots \quad 0 & \end{array}\right), \tag{6.1}$$

dostaneme

$$f(a)_\psi = \mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi} \cdot a_\varphi. \tag{6.2}$$

Matice $\mathrm{M}^f_{\psi,\varphi}$ se nazývá *matice afinního zobrazení f vzhledem k bazím φ, ψ*. K sestavení této matice potřebujeme následující údaje: matici lineárního zobrazení λ vzhledem k vektorovým bazím α, β a souřadnice bodu $f(a_0)$ vzhledem k afinní bázi ψ. Pro afinní zobrazení $f\colon \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$ a kanonické afinní báze φ prostoru R^m a ψ prostoru R^n značíme matici $\mathrm{M}^f_{\psi,\varphi}$ jednoduše M^f.

Příklad 6.1. Pomocí matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím je snadné charakterizovat všechny funkce $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, které jsou afinními zobrazeními. Jak víme z předpisu (6.1), matice takové funkce (vzhledem ke kanonickým bazím) má tvar

$$\mathrm{M}^f = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde p a q jsou nějaká čísla. Pro funkční hodnotu $f(a)$ funkce f v čísle $a \in \mathrm{R}$ platí

$$\begin{pmatrix} f(a) \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{M}^f \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$f(a) = pa + q \tag{6.3}$$

je obecný předpis pro afinní zobrazení $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. V matematické analýze by se místo písmene a spíše použilo x a předpis by vypadal takto: $f(x) = px + q$. Afinní zobrazení z R do R jsou tedy přesně funkce, kterým se v matematické analýze obvykle říká lineární funkce. Zde se nesmíme nechat zmást nekonzistentní terminologií; tyto funkce určitě všechny nejsou lineárními zobrazeními ve smyslu lineární algebry (které jsou?).

Příklad 6.2. Někdy je vhodnější zadat afinní zobrazení pomocí jeho matice vzhledem k nějakým bazím, než pomocí jeho geometrických vlastností. Ukážeme si to na příkladu barevné krychle (příklad 4.7). Definujme afinní transformaci $f\colon A \to A$ pomocí její matice v afinní bázi φ_{RGB}:

$$\mathrm{M}^f_{\varphi_{RGB}} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení f zobrazuje každou barvu na šedou. Stupeň šedi je přitom namíchán z jednotlivých složek barvy obvyklým způsobem, který respektuje citlivost oka na tyto složky (nejmenší citlivost je na zelenou).

Vynásobením matic lze zjistit, že

$$\mathrm{M}^f_{\varphi_{RGB}} \cdot \mathrm{M}^f_{\varphi_{RGB}} = \mathrm{M}^f_{\varphi_{RGB}}$$

(není nutné násobit konkrétní čísla, stačí místo nich použít obecné proměnné a využít toho, že součet hodnot v každém řádku matice je roven jedné). Zobrazení f je tedy afinní projekce na podprostor. Tímto podprostorem je přímka procházející body reprezentujícími bílou a černou barvu.

6.2 Matice afinního zobrazení a matice přechodu

Nejprve ukážeme, že matice přechodu je speciálním případem matice afinního zobrazení.

Věta 6.1. *Matice identického zobrazení* $\mathrm{id}_A : A \to A$ *vzhledem k afinním bazím* φ, ψ *je rovna matici přechodu mezi těmito bazemi:*

$$\mathbf{M}^{\mathrm{id}_A}_{\psi,\varphi} = \mathbf{M}_{\psi,\varphi}. \tag{6.4}$$

Důkaz. Lze provést různými způsoby, například srovnáním vztahů (4.12) a (6.2).

Dále si ukážeme, jak lze matic přechodu použít k převedení matice afinního zobrazení od jedné dvojice bazí k druhé.

Věta 6.2. *Pro afinní zobrazení* $f : A \to B$ *a afinní báze* φ, φ' *prostoru* A *a* ψ, ψ' *prostoru* B *platí*

$$M^f_{\psi',\varphi'} = M_{\psi',\psi} \cdot M^f_{\psi,\varphi} \cdot M_{\varphi,\varphi'}. \tag{6.5}$$

Důkaz. Víme, že pro libovolný bod $a \in A$ platí $f(a)_{\psi'} = M^f_{\psi',\varphi'} \cdot a_{\varphi'}$. Ukážeme, že pokud vektorem $a_{\varphi'}$ vynásobíme matici na pravé straně (6.5), dostaneme stejný výsledek. Postupně použijeme, co víme o matici afinního zobrazení a matici přechodu (vztahy (4.12) a (6.2)). Dostaneme

$$\begin{aligned} M_{\psi',\psi} \cdot M^f_{\psi,\varphi} \cdot M_{\varphi,\varphi'} \cdot a_{\varphi'} &= M_{\psi',\psi} \cdot (M^f_{\psi,\varphi} \cdot (M_{\varphi,\varphi'} \cdot a_{\varphi'})) \\ &= M_{\psi',\psi} \cdot (M^f_{\psi,\varphi} \cdot a_{\varphi}) = M_{\psi',\psi} \cdot f(a)_{\psi} = f(a)_{\psi'}. \end{aligned}$$

V počítačové grafice se slovo „transformace“ používá nejednoznačným způsobem, což může ztěžovat pochopení problematiky matic afinních zobrazení a matic přechodu. Slovo se totiž vyskytuje jednak v pojmu afinní transformace a jednak u matic přechodu, kterým se někdy říká transformační matice (transformation matrix).

6.3 Obecná rovnice afinního podprostoru

Mějme surjektivní afinní zobrazení $f: A \to \mathrm{R}^{m-n}$. Podle Věty 5.2 je množina B všech bodů $b \in A$ takových, že $f(b) = 0$, afinní podprostor afinního prostoru A (je to totiž množina $f^{-1}(\{0\})$ a neprázdná je díky surjektivitě). Také víme, že $\dim B = n$. Rovnice

$$f(b) = 0 \tag{6.6}$$

tedy jednoznačně charakterizuje afinní podprostor B dimenze n. Nazývá se *obecná rovnice afinního podprostoru* B.

Na rozdíl od parametrické rovnice afinního podprostoru, o které jsme hovořili v části 3.2, k získání afinního podprostoru charakterizovaného obecnou rovnicí je třeba tuto rovnici vyřešit. Afinní podprostor daný obecnou rovnicí je množinou všech jejích řešení.

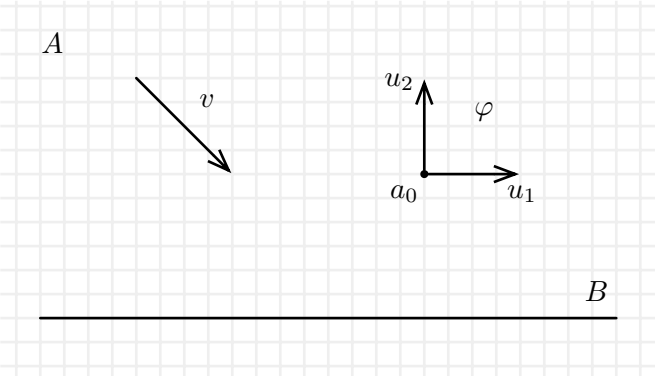
Věta 6.3. *Každý afinní podprostor má obecnou rovnici.*

ÚLOHY KE KAPITOLE 6

6.1. Najděte matici afinního zobrazení z úlohy 5.4 vzhledem k afinní bázi $\varphi = (a_3 - a_7, a_6 - a_7, a_8 - a_7, a_7)$.

6.2. Uvažujme bázi φ trojrozměrného afinního prostoru A z úlohy 5.4 a standardní afinní bázi φ dvojrozměrného afinního prostoru B z úlohy 5.5 s počátkem v levém horním rohu obrazovky (viz Př. 4.5). Najděte matici $\mathrm{M}^{f}_{\psi,\varphi}$.

6.3. Najděte matici afinní projekce na podprostor $f: A \to A$ vzhledem k afinní bázi φ. Pro projekci f platí, že $f(A) = B$ a obraz každého bodu je dán jeho součtem s vhodným násobkem vektoru v. A je afinní rovina zakreslená na obrázku 6.1, $B \subseteq A$ je afinní přímka, další údaje jsou rovněž patrny z obrázku.



Obrázek 6.1: Projekce na podprostor f z úlohy 6.3.

6.4. Mějme afinní prostory A a B dimenzí (po řadě) 2 a 1 a afinní bázi φ (resp. ψ) prostoru A (resp. B). Dále mějme body $a_0, a_1, a_2 \in A$ a $b_0, b_1, b_2 \in B$. Rozhodněte, zda existuje afinní zobrazení $f: A \to B$ takové, že $f(a_0) = b_0$, $f(a_1) = b_1$ a $f(a_2) = b_2$, když (ve zkrácených souřadnicích)

1. $(a_0)_\varphi = [0,-1]$, $(a_1)_\varphi = [2,1]$, $(a_2)_\varphi = [-1,-2]$,
   $(b_0)_\psi = 2$, $(b_1)_\psi = -2$, $(b_2)_\psi = 4$,
2. $(a_0)_\varphi = [0,-1]$, $(a_1)_\varphi = [2,1]$, $(a_2)_\varphi = [-1,-2]$,
   $(b_0)_\psi = -1$, $(b_1)_\psi = -2$, $(b_2)_\psi = 0$,
3. $(a_0)_\varphi = [-1,1]$, $(a_1)_\varphi = [2,2]$, $(a_2)_\varphi = [-1,-1]$,
   $(b_0)_\psi = 2$, $(b_1)_\psi = -2$, $(b_2)_\psi = 4$,
4. $(a_0)_\varphi = [-1,1]$, $(a_1)_\varphi = [2,2]$, $(a_2)_\varphi = [-1,-1]$,
   $(b_0)_\psi = -1$, $(b_1)_\psi = -2$, $(b_2)_\psi = 0$.

Pokud zobrazení existuje právě jedno, najděte jeho podřízené lineární zobrazení a matici vzhledem k bazím φ, ψ.

6.5. Najděte matici posunutí o vektor $(1,-2)$ v $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi.

6.6. Najděte matici středové souměrnosti v dvourozměrném afinním prostoru A se středem v obecném bodě a_0 vzhledem k libovolné afinní bázi φ (v matici budou figurovat souřadnice bodu a_0 vzhledem k bázi φ). Podobně najděte matice obecného posunutí a stejnolehlosti.

6.7. Za jakých podmínek je matice $\mathrm{M}^f_{\psi,\varphi}$ jednotková?

6.8. Obrázek o rozměrech $w \times h$ máme zobrazit v obdélníku o rozměrech $w' \times h'$ (v pixelech). Obrázek máme zobrazit doprostřed, nesmíme jej zkreslit (tj. mají být zachovány poměry délek stran a úhly) a máme využít co největší plochu obdélníka. V obrázku i obdélníku máme zadány afinní báze s počátkem v levém dolním rohu a s vektory délky jednoho pixelu směřujícími doprava (první vektor) a nahoru (druhý vektor). Najděte matici hledaného zobrazení vzhledem k těmto bazím.

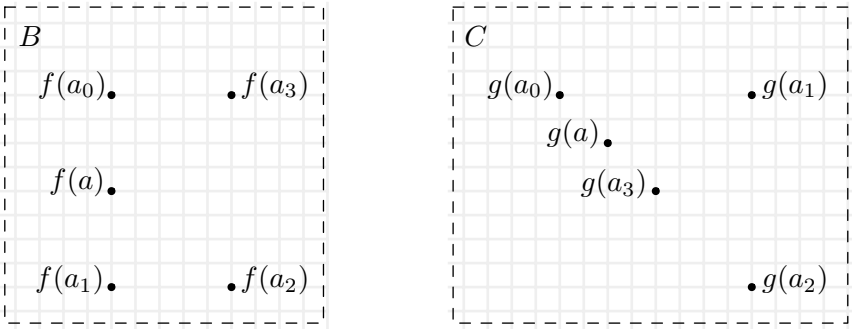
6.9. Mějme čtyři body a_0, a_1, a_2, a_3 v trojrozměrném afinním prostoru A. Prostor se zobrazí dvěma afinními projekcemi $f: A \to B$ a $g: A \to C$ na dvojrozměrné afinní prostory B a C tak, jak je vidět na obr. 6.2. Dokažte, že body a_0, a_1, a_2, a_3 tvoří bodovou bázi prostoru A.

6.10. Zobrazení f a g z předchozí úlohy zobrazí bod $a \in A$ tak, jak je vidět na obr. 6.2. Najděte souřadnice bodu a v bázi $\varphi = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. Pokud úlohu vyřešíte, budete umět rekonstruovat 3D scénu na základě pohledů ze dvou různých stran a identifikace čtyř význačných bodů ve scéně (bez efektu perspektivy).

6.11. Použijme výsledek úlohy 5.3 na zobrazení f z příkladu 6.2 a identické zobrazení. Vychází, že pro libovolné číslo $c \in [0,1]$ je zobrazení $c \cdot \mathrm{Id}_A + (1-c) \cdot f$ afinní. Nalezněte matici tohoto zobrazení pro konkrétní hodnoty čísla c. Na obrázku 6.3 jsou zobrazeny výsledky aplikace tohoto zobrazení na jednotlivé pixely dané pixmapy pro hodnoty $c = 0$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 a 1 (zleva doprava, shora dolů).

6.12. Najděte matici středové souměrnosti z příkladu 5.12 (doplňkové barvy) vzhledem k bázi φ_{RGB}.

6.13. Najděte matici zobrazení f z příkladu 6.2 vzhledem k bázi φ_{CMY} (příklad 4.7).



Obrázek 6.2: Obrazy bodů $a_0, a_1, a_2, a_3, a \in A$ při afinních zobrazeních $f : A \to B$ a $g : A \to C$ z úlohy 6.10.

6.14. Zesvětlení barvy (viz příklad 4.7) lze definovat jako stejnolehlost se středem v bílé barvě (v příkladu 4.7 je to bod b_0) s nějakým koeficientem $c \in [0,1]$. Najděte matici tohoto zobrazení vzhledem k bázi φ_{RGB}.

6.15. Místo bodu b_0 v předchozí úloze můžeme použít jinou barvu — např. stejnolehlost se středem v modré barvě a koeficientem $c \in [0,1]$ realizuje smíchání libovolné barvy s modrou v poměru daném číslem c. Najděte matici tohoto zobrazení vzhledem k bázi φ_{RGB}.

Obrázek 6.3: Obrázek k úloze 6.11

Kapitola 7

Vzájemná poloha afinních podprostorů

V této kapitole se zabýváme problémem vzájemné polohy afinních podprostorů. Z elementární geometrie víme, že přímky v trojrozměrném prostoru mohou být rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. Tyto vztahy zobecníme na libovolné afinní podprostory afinního prostoru libovolné dimenze.

7.1 Rovnoběžnost, různoběžnost, mimoběžnost

Mějme dva afinní podprostory B a B' se zaměřeními V, V' afinního prostoru A se zaměřením U.

O afinních podprostorech B, B' řekneme, že jsou

- *rovnoběžné*, pokud platí $V \subseteq V'$ nebo $V' \subseteq V$,
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a pokud $B \cap B' \neq \emptyset$,
- *mimoběžné* ve všech ostatních případech.

Definice rovnoběžnosti se může zdát nepřirozená. Čtenáři ovšem nic nebrání pokusit se na základě intuitivní představy o rovnoběžnosti navrhnout definici vlastní. Je to užitečné cvičení.

Příklad 7.1. Jsou-li podprostory B a B' jednorozměrné (tedy přímky), jsou vektorové prostory V a V' generované každý jedním nenulovým vektorem, řekněme $v \in V$ a $v' \in V'$. Parametrické rovnice těchto podprostorů jsou pak $b = b_0 + tv$ pro podprostor B a $b' = b'_0 + t'v'$ pro podprostor B', kde $b_0 \in B$ a $b'_0 \in B'$ jsou libovolné body. V případě, že podprostory B a B' jsou rovnoběžné, je podle definice $V = V'$, takže vektory v a v' jsou lineárně závislé (každý je násobkem druhého).

Příklad 7.2. V obecném případě, je-li $\dim B = n$ a $\dim B' = n'$, je parametrická rovnice podprostoru B

$$b = b_0 + t^1 v_1 + \cdots + t^n v_n$$

a podprostoru B'

$$b' = b'_0 + t'^1 v'_1 + \cdots + t'^{n'} v'_{n'},$$

kde $b_0 \in B_0$, $b'_0 \in B'_0$, vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé (a generují V) a vektory $v'_1, \ldots, v'_{n'}$ jsou lineárně nezávislé (a generují V').

Pokud jsou podprostory B a B' rovnoběžné a $n' \leq n$ (tedy například B je rovina a B' přímka nebo B i B' jsou roviny), je podle definice $V' \subseteq V$. Každý z vektorů $v'_1, \ldots, v'_{n'}$ je tedy lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_n$, což v souřadnicích vzhledem k libovolné vektorové bázi α vektorového prostoru U znamená, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n'\}$ musí mít řešení soustava rovnic

$$\begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_n^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^m & v_2^m & \cdots & v_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i'^1 \\ v_i'^2 \\ \vdots \\ v_i'^m \end{pmatrix},$$

kde: v_l^k je k-tá souřadnice vektoru v_l v bázi α (tedy $v_l^k = (v_l)_\alpha^k$), $v_i'^k$ je k-tá souřadnice vektoru v'_i v bázi α a $t^1, t^2, \ldots, t^n$ jsou neznámé (hledané koeficienty lineární kombinace).

Příklad 7.3. Předpokládejme například, že $\dim A = 3$, $\dim B = 2$ a $\dim B' = 1$ (B je rovina a B' přímka). Dále předpokládejme, že v afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$ má rovina B rovnici

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

a přímka B'

$$b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

(obojí ve zkrácených souřadnicích). Aby byla rovina B s přímkou B' rovnoběžná, musí podle předchozího příkladu existovat řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To existuje ($t^1 = 2$ a $t^2 = 1$), takže podprostory B a B' jsou rovnoběžné.

Následující věta studuje situaci, kdy dva rovnoběžné afinní podprostory mají společný bod.

Věta 7.1. *Předpokládejme, že afinní podprostory B a B' jsou rovnoběžné a že $V' \subseteq V$. Následující čtyři podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje bod $b_0 \in B \cap B'$.*
2. *$B' \subseteq B$.*
3. *Pro každé dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ platí $b' - b \in V$.*
4. *Existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b \in V$.*

Důkaz. Předpokládejme, že platí podmínka 1, a zvolme libovolný bod $b' \in B'$. Jelikož $b_0 \in B'$ (podle podmínky 1), leží vektor $b' - b_0$ ve vektorovém prostoru V'. Z předpokladu $V' \subseteq V$ plyne i $b' - b_0 \in V$. Jelikož $b_0 \in B$ (podmínka 1), dostáváme $b' \in B$, takže $B' \subseteq B$ a je splněna podmínka 2.

Nyní ukážeme, že z podmínky 2 plyne podmínka 3. Mějme body $b \in B$ a $b' \in B'$. Podle podmínky 2 $b' \in B$, takže vektor $b' - b$ leží v zaměření podprostoru B, tedy ve V.

Podmínka 4 plyne z podmínky 3, jelikož podprostory B a B' jsou neprázdné, a konečně, pokud platí podmínka 4, je $b' = b + (b' - b) \in B$. Proto je podmínka 1 splněna pro $b_0 = b'$.

Hlavním závěrem Věty 7.1 je (nijak překvapivý) poznatek, který je dán platností implikace první a druhé podmínky: na to, aby z rovnoběžných afinních podprostorů byl jeden podprostorem druhého stačí, aby měly jeden společný bod. Třetí a čtvrtá podmínka jsou ovšem rovněž užitečné, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 7.4. V Př. 7.3 jsme si dokázali rovnoběžnost afinních podprostorů $B, B' \subseteq A$. Nyní pojďme ověřit, zda $B' \subseteq B$. Kdybychom neznali Větu 7.1, museli bychom ukázat, že každý bod přímky B' leží v rovině B. Vyšli bychom z parametrické rovnice roviny B (7.1) a přímky B' (7.2) a dostali soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

pro neznámé t^1, t^2 a parametr t'. Soustava musí mít řešení pro libovolnou hodnotu parametru t'.

Ekvivalence podmínek 1 a 2 Věty 7.1 umožňuje použít jednodušší řešení. Není nutné dokazovat, že každý bod přímky B' leží v B, ale stačí najít jeden takový. Parametr t' v soustavě rovnic (7.3) tedy můžeme chápat jako neznámou. Jinými slovy, stačí najít jednu trojici (t^1, t^2, t'), která je řešením této soustavy.

Další zjednodušení poskytují podmínky 3 a 4. Díky ekvivalenci podmínek 1 a 4 stačí najít jednu dvojici bodů $b \in B$ a $b' \in B'$ tak, aby vektor $b'-b$ ležel ve V. Jelikož podmínka 4 je ekvivalentní s podmínkou 3, mohou to být libovolné body $b \in B$ a $b' \in B'$ s tím, že kdyby pro ně neplatilo $b'-b \in V$, není třeba hledat dál.

Nejjednodušší je použít jako bod b bod o (zkrácených) souřadnicích $[2,2,0]$ a jako bod b' bod o souřadnicích $[1,0,5]$. Vektor $b'-b$ má tedy souřadnice $(-1,-2,5)$ a k zjištění, zda leží v podprostoru V, stačí vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

To je opravdu další zjednodušení proti soustavě (7.3), protože nyní máme soustavu rovnic o dvou neznámých. Navíc, matice této soustavy je stejná jako matice soustavy z příkladu 7.3, kterou jsme už řešili, takže stačí pouze změnit pravou stranu, což výpočet usnadní ještě více. Soustava má řešení $t^1 = -1$ a $t^2 = 2$, takže můžeme uzavřít, že $B' \subseteq B$.

Na závěr příkladu poznamenejme, že v soustavě rovnic (7.4) vlastně pomocí parametrické rovnice (7.1) testujeme, zda bod b' leží v rovině B.

Pokud afinní podprostory nejsou rovnoběžné, mohou být různoběžné nebo mimoběžné. Následující věta pomáhá rozlišit mezi těmito dvěma případy. (Symbolem „$\vee$“ označujeme operaci spojení vektorových podprostorů.)

Věta 7.2. *Předpokládejme, že afinní podprostory B a B' nejsou rovnoběžné. Pak jsou následující tři podmínky ekvivalentní:*

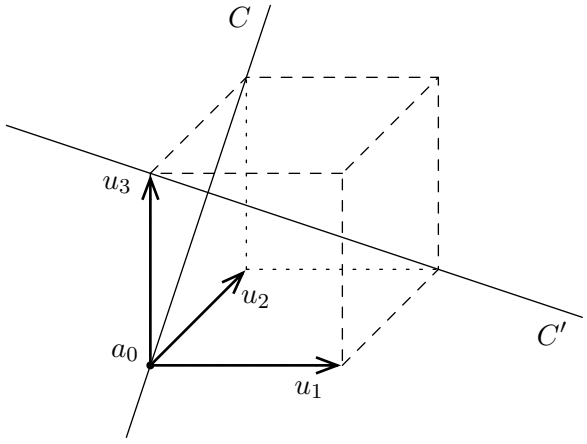
1. *B a B' jsou různoběžné.*
2. *Pro každé dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ platí $b'-b \in V \vee V'$.*
3. *Existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b'-b \in V \vee V'$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve různoběžnost podprostorů B a B' (tedy platnost podmínky 1) a označme b_0 nějaký prvek jejich průniku. Vektor $b_0 - b$ určitě leží v zaměření V (oba body b_0 a b totiž leží v B) a vektor $b'-b_0$ (z podobného důvodu) leží ve V'. Součet těchto vektorů tedy leží v $V \vee V'$. Jelikož je ale roven vektoru $b'-b$, dokázali jsme podmínku 2.

Podmínka 3 plyne z podmínky 2 triviálně, jelikož podprostory B a B' jsou neprázdné (kdyby ovšem nebyly, podmínka 3 by neplatila).

Zbývá dokázat, že z podmínky 3 plyne podmínka 1. Z předpokladu $b'-b \in V \vee V'$ plyne existence vektorů $v \in V$ a $v' \in V'$ takových, že $b'-b = v+v'$. Úpravou dostaneme $b+v = b'-v'$. Nalezli jsme tedy bod, který leží v podprostoru B, protože je součtem bodu $b \in B$ a vektoru $v \in V$. Současně tento bod ovšem leží i v podprostoru B', protože je součtem bodu $b' \in B'$ a vektoru $-v' \in V'$. Podprostory B a B' jsou tedy různoběžné.

Věta 7.2 nám (mimo jiné) říká, že k zjištění, zda jsou (nerovnoběžné) podprostory B a B' různoběžné, stačí zvolit jakékoli dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ a zjistit, zda $b'-b \in V \vee V'$. Skutečně, pokud totiž vyjde $b'-b \in V \vee V'$, pak je splněna podmínka 3, z níž podle věty plyne podmínka 1, tedy že jsou podprostory různoběžné. Pokud naopak vyjde $b'-b \notin V \vee V'$, není splněna podmínka 2 (jelikož $b'-b \in V \vee V'$ neplatí pro každé $b \in B$ a $b' \in B'$). Podle věty tedy není splněna ani podmínka 1 (podmínky jsou ekvivalentní!) a podprostory jsou mimoběžné.



Obrázek 7.1: Rovnoběžnostěn z příkladu 7.5

Příklad 7.5. Na obr. 7.1 je znázorněn rovnoběžnostěn v afinním prostoru A určený bodem a_0 a lineárně nezávislými vektory u_1, u_2 a u_3. Afinní přímky $C, C' \subseteq A$ prochází jeho vrcholy, jak je zřejmé z obrázku. Určíme výpočtem vzájemnou polohu těchto přímek (je jasné, že by měly vyjít mimoběžné).

Přímka C prochází bodem a_0, její zaměření je $\langle u_2+u_3 \rangle$ (zatímco zaměření je určeno jednoznačně, generující vektor ne). Přímku můžeme tedy symbolicky zapsat takto: $C = a_0 + \langle u_2+u_3 \rangle$, její parametrická rovnice (jedna z možných) je $c = a_0 + t(u_2+u_3)$. Podobně pro přímku C' dostaneme parametrickou rovnici $c' = a_0 + u_3 + t'(u_1+u_2-u_3)$.

Nejprve vyzkoumáme, zda jsou přímky rovnoběžné. To podle definice nastane v případě, že jejich směrové vektory jsou lineárně závislé, což ukážeme nebo vyvrátíme vyřešením rovnice

$$t(u_2+u_3)+t'(u_1+u_2-u_3)=0.$$

Pokud najdeme čísla t a t', která nebudou obě současně nulová a budou řešením rovnice, bude to znamenat lineární závislost směrových vektorů. V opačném případě jsou vektory lineárně nezávislé. Po úpravě levé strany dostaneme

$$t'u_1+(t+t')u_2+(t-t')u_3=0.$$

Jelikož vektory u_1, u_2 a u_3 jsou lineárně nezávislé, rovnice platí jedině pro

$$\begin{aligned} t' &= 0 \\ t + t' &= 0 \\ t - t' &= 0. \end{aligned}$$

Odtud už dostaneme $t = t' = 0$, což ukazuje, že vektory $u_2 + u_3$ a $u_1 + u_2 - u_3$ jsou lineárně nezávislé, takže přímky C_1 a C_2 nejsou rovnoběžné.

V druhém kroku rozhodneme, zda jsou přímky C_1 a C_2 různoběžné, nebo mimoběžné (že jsou různoběžné nebo mimoběžné už víme — hle, jaký rozdíl způsobí vynechání jedné čárky ve větě). Použijeme k tomu Větu 7.2 a poznámku za ní.

Jelikož $a_0 \in C$ a $a_0 + u_3 \in C'$, stačí zjistit, zda vektor u_3 leží ve spojení zaměření podprostorů C a C', tedy zda je lineární kombinací vektorů $u_2 + u_3$ a $u_1 + u_2 - u_3$. Řešíme tedy rovnici

$$t(u_2 + u_3) + t'(u_1 + u_2 - u_3) = u_3,$$

kterou si podobně jeko před chvílí upravíme na rovnici

$$t'u_1 + (t + t')u_2 + (t - t')u_3 = u_3.$$

Nyní využijeme fakt, že koeficienty lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů jsou určeny jednoznačně. Vektory u_1, u_2 a u_3 jsou lineárně nezávislé a na levé i pravé straně máme jejich lineární kombinaci. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} t' &= 0 \\ t + t' &= 0 \\ t - t' &= 1. \end{aligned}$$

Jak se snadno přesvědčíme, tato soustava rovnic nemá řešení. Přímky C a C' jsou tedy mimoběžné.

Všimněme si, že poslední soustavu rovnic jsme už řešili, pouze s nulovou pravou stranou. To v praxi umožňuje zjednodušit výpočty.

7.2 Příčka mimoběžek

Nyní se podíváme na speciální problém nalezení příčky dvou mimoběžných přímek v trojrozměrném prostoru. V této podkapitole budeme tedy předpokládat, že dimenze afinního prostoru A je rovna 3 a afinní podprostory $B, B' \subseteq A$ jsou mimoběžné přímky.

Uvedené výsledky lze ovšem poměrně snadno zobecnit na případ dvou mimoběžných přímek v afinním prostoru libovolné dimenze.

Příčkou mimoběžek $B, B' \subseteq A$ nazýváme libovolnou přímku $C \subseteq A$, která má neprázdný průnik s každou z přímek B a B'.

Libovolnou volbou bodů $b \in B$ a $b' \in B'$ je určena příčka mimoběžek B a B'. Je tedy zřejmé, že příček mimoběžek B a B' existuje nekonečně mnoho a snadno se zkonstruují. Proto má smysl uvažovat o příčce mimoběžek splňující nějaké dodatečné podmínky. Obvykle se řeší následující dvě úlohy:

1. nalézt příčku dvou mimoběžek, která má zadaný směrový vektor,

2. nalézt příčku dvou mimoběžek, která prochází zadaným bodem.

Obecné řešení první úlohy uvádí následující věta.

Věta 7.3. *Mějme dvě mimoběžné přímky B a B' se zaměřeními V a V' v trojrozměrném afinním prostoru A se zaměřením U. Dále uvažujme nenulový vektor $w \in U$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje příčka mimoběžek B a B' se směrovým vektorem w.*

2. *$w \notin V \vee V'$.*

Důkaz. Existence příčky mimoběžek B a B' se směrovým vektorem w znamená, že existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že vektor $b' - b$ je násobkem vektoru w. Podle Věty 7.2 ovšem nesmí být $b' - b \in V \vee V'$ (jinak by přímky byly různoběžné), což je ekvivalentní s podmínkou $w \notin V \vee V'$.

Příklad 7.6. Vraťme se k příkladu 7.5. Obrázek 7.1 sice znázorňuje rovnoběžnostěn v trojrozměrném prostoru, ale sám je dvojrozměrný. Ve skutečnosti zobrazuje část nějakého dvojrozměrného afinního prostoru B, na který je prostor A promítnut afinní projekcí $f\colon A \to B$. Body $a_1 = a_0 + u_2$ a $a_2 = a_0 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3$ prostoru A jsou různé (to plyne z lineární nezávislosti vektorů u_1, u_2, u_3), na obrázku ovšem splývají. Projekce f je totiž zobrazuje na tentýž bod prostoru B. Naším cílem je najít přímku $D \subseteq A$, která se projekcí f zobrazí na průsečík[1] obrazů přímek C a C'. Je to přímka, jejíž všechny body se zobrazí do bodu, který je na obr. 7.1 průsečíkem přímek označených C a C'.

Jak najít směrový vektor přímky D? Pro libovolné dva body $d_1, d_2 \in D$ platí $f(d_1) = f(d_2)$, takže vektor těmito body určený se zobrazí podřízeným lineárním zobrazením λ na nulový vektor. To plyne přímo z definice podřízeného lineárního zobrazení (5.4).

Pro vektor $a_2 - a_1$ také platí $\lambda(a_2 - a_1) = 0$, musí proto být směrovým vektorem přímky D (jak to podrobně zdůvodnit?). Abychom se vyhnuli zlomkům, budeme uvažovat jeho dvojnásobek. Hledáme tedy příčku mimoběžek C a C' se směrovým vektorem $2(a_2 - a_1)$.

[1] Průsečíkem rozumíme, jak je v geometrii obvyklé, jediný společný bod.

Aby měla úloha řešení, je podle Věty 7.3 třeba, aby vektor $2(a_2-a_1)$ nebyl lineární kombinací směrových vektorů přímek C a C'. Vektor $2(a_2-a_1)$ je roven $u_1-2u_2+u_3$, směrové vektory přímek C a C' už známe z příkladu 7.5. Je tedy třeba ověřit, že rovnice

$$t(u_2+u_3)+t'(u_1+u_2-u_3)=u_1-2u_2+u_3$$

nemá řešení. Podobnou úlohu jsme řešili už dvakrát. Stejným postupem jako dříve dostaneme známou soustavu lineárních rovnic, pouze s jinou pravou stranou:

$$\begin{aligned} t' &= 1 \\ t+t' &= -2 \\ t-t' &= 1 \end{aligned}$$

Jak snadno ověříme, soustava opravdu nemá řešení a podmínka Věty 7.3 je splněna.

Pusťme se tedy do hledání příčky D. Jelikož už známe její směrový vektor, stačí nalézt jeden její bod. To lze udělat různými způsoby. My budeme postupovat takto: nejprve vezmeme rovinu $\bar{C}$ určenou přímkou C a směrovým vektorem hledané přímky D a pak najdeme průsečík d_0 této roviny s přímkou C'. To bude hledaný bod přímky D.

Parametrická rovnice roviny $\bar{C}$, ve které předvídavě místo vektoru u_2+u_3 použijeme vektor $-u_2-u_3$, který je rovněž směrovým vektorem přímky C (není to nutné, ale umožní to částečně použít jeden výsledek, který už máme):

$$\bar{c}=a_0-t(u_2+u_3)+\bar{t}(u_1-2u_2+u_3)$$

a parametrická rovnice přímky C' (pro zopakování):

$$c'=a_0+u_3+t'(u_1+u_2-u_3).$$

Bod d_0 leží jak v rovině $\bar{C}$, tak na přímce C'. Hledáme tedy parametry t, t' a $\bar{t}$, splňující

$$a_0+u_3+t'(u_1+u_2-u_3)=a_0-t(u_2+u_3)+\bar{t}(u_1-2u_2+u_3),$$

což vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} t'-\bar{t} &= 0 \\ t+t'+2\bar{t} &= 0 \\ t-t'-\bar{t} &= -1 \end{aligned}$$

Řešení soustavy je jediné, a to $t=-\frac{3}{5}$, $t'=\frac{1}{5}$ a $\bar{t}=\frac{1}{5}$. Hledaný průsečík d_0 dostaneme dosazením příslušných parametrů do parametrické rovnice roviny $\bar{C}$ nebo do parametrické rovnice přímky C' (obojí musí vyjít stejně). Dostáváme $d_0=a_0+\frac{1}{5}u_1+\frac{1}{5}u_2+\frac{4}{5}u_3$ a rovnice hledané příčky D je pak

$$d=a_0+\frac{1}{5}u_1+\frac{1}{5}u_2+\frac{4}{5}u_3+s\left(\frac{1}{2}u_1-u_2+\frac{1}{2}u_3\right).$$

Tím je příklad vyřešen.

Následující věta uvádí obecné řešení druhé z výše uvedených úloh.

Věta 7.4. *Mějme dvě mimoběžné přímky $B = b_0 + V$ a $B' = b'_0 + V'$ v trojrozměrném afinním prostoru A a bod $c_0 \in A$, $c_0 \notin B \cup B'$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje příčka C mimoběžek B a B' obsahující bod c_0.*
2. *$c_0 \notin b_0 + (V \vee V')$ a $c_0 \notin b'_0 + (V \vee V')$.*

CHYBA V DŮKAZU

Důkaz. Předpokládejme, že příčka C existuje a označme c její průsečík s přímkou B. Vektor $c - c_0$ je směrovým vektorem příčky C (leží v jejím zaměření). Podle Věty 7.3 tento vektor neleží v $V \vee V'$. Jelikož $c - b_0 \in V$, vektor $c_0 - c + c - b_0 = c_0 - b_0$ rovněž neleží v $V \vee V'$. Z toho ovšem plyne $c_0 \notin b_0 + (V \vee V')$. Stejným způsobem dokážeme, že $c_0 \notin b'_0 + (V \vee V')$ (pouze začneme bodem $c' \in C \cap B'$). Můžeme uzavřít, že z podmínky 1 plyne podmínka 2.

V druhé části důkazu ukážeme, že není-li splněna podmínka 1, není splněna ani podmínka 2. Pokud příčka C neexistuje, znamená to, že ani přímka určená body c_0 a b_0 hledanou příčkou není. Podle Věty 7.3 tedy $c_0 - b_0 \in V \vee V'$, což je totéž jako $c_0 \in b_0 + (V \vee V')$. Podobně se ukáže i druhá část.

Příklad 7.7. Najdeme příčku D mimoběžek C a C' z příkladu 7.5 procházející vrcholem c_0 rovnoběžnostěnu zakresleným na obr. 7.1 vpravo nahoře, tedy bodem $c_0 = a_0 + u_1 + u_2 + u_3$. Nebudeme ověřovat existenci příčky pomocí Věty 7.4, místo toho ji zkusíme rovnou najít. Budeme postupovat ve třech krocích:

1. Najdeme rovinu $\bar{C}$ určenou přímkou C a bodem c_0.
2. Najdeme průsečík c'_0 roviny $\bar{C}$ a přímky C'.
3. Hledaná příčka bude přímka určená body c_0 a c'_0.

Rovinu $\bar{C}$ můžeme zadat pomocí nějakého bodu přímky C, směrového vektoru přímky C a vektoru daného bodem c_0 a nějakým bodem přímky C. Zvolíme bod a_0 a vektory $-u_2 - u_3$ a $u_1 + u_2 + u_3$. Máme tedy $C = a_0 + \langle -u_2 - u_3, u_1 + u_2 + u_3 \rangle$ a parametrická rovnice roviny $\bar{C}$ je

$$\bar{c} = a_0 - t(u_2 + u_3) + \bar{t}(u_1 + u_2 + u_3).$$

Tím jsme dokončili první krok.

Průsečík roviny $\bar{C}$ a přímky C' najdeme pomocí jejich parametrických rovnic. Dostaneme rovnici

$$a_0 + u_3 + t'(u_1 + u_2 - u_3) = a_0 - t(u_2 + u_3) + \bar{t}(u_1 + u_2 + u_3),$$

která vede (s využitím lineární nezávislosti vektorů u_1, u_2 a u_3) na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} t' - \bar{t} &= 0 \\ t + t' - \bar{t} &= 0 \\ t - t' - \bar{t} &= -1, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $t = 0$, $t' = \bar{t} = \frac{1}{2}$. Dosazením do parametrické rovnice roviny $\bar{C}$ nebo přímky C' dostaneme hledaný průsečík $c'_0 = a_0 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3)$.

Příčka D je dána body c_0 a c'_0, je to tedy přímka $D = a_0 + \langle u_1 + u_2 + u_3 \rangle$.

ÚLOHY KE KAPITOLE 7

7.1. Dokažte, že bod (tedy 0-rozměrný afinní podprostor) je rovnoběžný s libovolným jiným afinním podprostorem.

7.2. Mějme afinní zobrazení $f : A \to B$ a afinní podprostory $C, C' \subseteq A$, $D, D' \subseteq B$. Dokažte nebo vyvraťte:

1. Jsou-li podprostory C a C' rovnoběžné (různoběžné, mimoběžné), jsou i podprostory $f(C)$ a $f(C')$ rovnoběžné (různoběžné, mimoběžné).
2. Jsou-li podprostory D a D' rovnoběžné (různoběžné, mimoběžné), jsou i podprostory $f^{-1}(D)$ a $f^{-1}(D')$ rovnoběžné (různoběžné, mimoběžné).

7.3. Dokažte, že v trojrozměrném afinním prostoru neexistují dvě mimoběžné roviny.

7.4. Najděte dvě mimoběžné roviny ve čtyřrozměrném afinním prostoru.

7.5. Existují ve čtyřrozměrném afinním prostoru dva mimoběžné podprostory dimenzí 2 a 3?

7.6. Na základě výsledků předchozích příkladů se pokuste zformulovat a dokázat obecné tvrzení.

7.7. Najděte příčku mimoběžek C a C' z příkladu 7.5 procházející 1. bodem $a_0 + u_2$, 2. bodem $a_0 - u_2$.

Kapitola 8

Konvexnost

V této kapitole se věnujeme jistým typům podmnožin afinních prostorů, které nejsou afinními podprostory a jsou často používány: konvexním množinám, mnohostěnům, lomeným čarám a plochám.

8.1 Konvexní kombinace a konvexní množiny

Afinní kombinaci $c^0a_0 + c^1a_1 + \cdots + c^ka_k$ bodů $a_0, a_1, \ldots, a_k$ afinního prostoru A s koeficienty $c^0, c^1, \ldots, c^k$ nazýváme *konvexní kombinací*, jestliže všechny koeficienty $c^0, c^1, \ldots, c^k$ jsou nezáporné (to současně znamená, že jsou všechny menší nebo rovny jedné).

Příklad 8.1. Při interpretaci barvy jako prvku barevné krychle z příkladu 4.7 můžeme pro dvě barvy a_0, a_1 jejich konvexní kombinaci $ca_0 + (1-c)a_1$ chápat jako barvu, která je „mezi“ těmito dvěma barvami, neboli jako barvu, která vznikla jejich smícháním. Koeficienty c a $1-c$ pak určují poměr, ve kterém se barvy míchají. Konvexní kombinace lze využít k prolnutí dvou bitmap, jak je vidět na obrázku 8.1. Vyšli jsme ze dvou bitmap a vytvořili novou bitmapu tak, že jsme barvu každého pixelu vypočetli jako konvexní kombinaci barev příslušného pixelu v původních bitmapách. Koeficient c byl postupně (zleva doprava, shora dolů) roven hodnotám $1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0$.

Konvexním obalem neprázdné podmnožiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech konvexních kombinací prvků množiny K. Množina K se nazývá *konvexní*, je-li její konvexní obal roven K. *Dimenzi konvexní množiny* K definujeme jako dimenzi jejího afinního obalu a značíme $\dim K$.

Věta 8.1. *Konvexní obal libovolné neprázdné podmnožiny afinního prostoru A je konvexní množina.*

Důkaz. Postupujeme stejně jako v důkazu Věty 3.2.

Obrázek 8.1: Prolnutí obrázků.

Příklad 8.2. Každý rovnoběžnostěn v afinním prostoru A je konvexní množina. Rovnoběžnostěn určený bodem a_0 a vektory $u_1,\dots,u_k$ je konvexním obalem množiny svých vrcholů (tedy bodů tvaru $a_0+c^1u_1+c^2u_2+\cdots+c^ku_k$, kde každý z koeficientů $c^1,\dots,c^k$ je roven 0 nebo 1).

Příklad 8.3. Každá Bézierova křivka (Př. 3.4) leží v konvexním obalu množiny svých řídicích bodů. Je to proto, že, každý její prvek je konvexní kombinací řídicích bodů.

Věta 8.2. *Množina $K\subseteq A$ je konvexní, právě když pro libovolné dva různé body $a_0,a_1\in K$ je úsečka jimi určená podmnožinou K.*

Důkaz. Podle předchozího příkladu je každý bod úsečky určené body a_0 a a_1 konvexní

kombinací těchto bodů. Jestliže $a_0, a_1 \in K$, pak tedy i celá úsečka je podmnožinou K. To dokazuje implikaci zleva doprava.

Předpokládejme, že pro libovolné dva různé body $a_0, a_1 \in K$ je úsečka jimi určená podmnožinou K. Ukážeme, že množina K je konvexní. K tomu je třeba ukázat, že libovolná konvexní kombinace $c^0 b_0 + \cdots + c^k b_k$ bodů $b_0, \ldots, b_k \in K$ leží v K. Dokážeme to indukcí vzhledem ke k.

Pro $k = 1$ platí tvrzení triviálně, protože pro libovolné dva body $b_0, b_1 \in K$ leží konvexní kombinace $c^0 b_0 + c^1 b_1$ v K přímo podle předpokladu.

Nyní předpokládejme, že $k > 1$ a tvrzení platí pro číslo $k-1$. Konvexní kombinaci $c^0 b_0 + \cdots + c^k b_k$ rozepíšeme:

$$c^0 b_0 + \cdots + c^{k-1} b_{k-1} + c^k b_k = (1 - c^k) \left(\frac{c^0}{1 - c^k} b_0 + \cdots + \frac{c^{k-1}}{1 - c^k} b_{k-1} \right) + c^k b_k.$$

Uvnitř velké závorky je konvexní kombinace bodů $b_0, \ldots, b_{k-1} \in K$, tedy podle indukčního předpokladu prvek K. Celá pravá strana je konvexní kombinací dvou bodů, a to bodu ve velké závorce a bodu b_k. Tato konvexní kombinace tedy leží na úsečce určené body množiny K, čili, podle předpokladu, je rovněž prvkem množiny K.

Uvedený postup jsme mohli použít jen pro $c^k \neq 1$. Případ $c^k = 1$ je ovšem triviální, protože v něm platí $c^0 b_0 + \cdots + c^k b_k = b_k$. Věta je tedy dokázána.

8.2 Mnohostěny, polytopy, poloprostory

Uvažme množinu $\{a_0, \ldots, a_k\}$ bodů v obecné poloze. Její konvexní obal se nazývá *trojúhelník*, je-li $k = 2$ a *čtyřstěn*, je-li $k = 3$. Konvexní obal libovolné konečné množiny (jejíž prvky nemusejí být v obecné poloze) se nazývá *konvexní mnohostěn*. Konvexní mnohostěn dimenze 2 se nazývá *konvexní mnohoúhelník* (anglicky *polygon*, což je název, který se v počítačové grafice obvykle bohužel používá pro jiný útvar, totiž lomenou čáru). Konvexní mnohostěn dimenze 1 je úsečka (to je tvrzení, nikoliv definice).

Prvek a konvexního mnohostěnu K, který je konvexním obalem množiny $\{a_0, \ldots, a_k\}$, se nazývá jeho *vrchol*, jestliže neleží v konvexním obalu množiny $\{a_0, \ldots, a_k\} \setminus \{a\}$. Přímo z této definice plyne, že každý konvexní mnohostěn má konečně mnoho vrcholů.

Příklad 8.4. Rovnoběžnostěn je konvexní mnohostěn. Jeho vrcholy (jakožto vrcholy rovnoběžnostěnu definované v podkapitole 4.1) jsou právě vrcholy ve smyslu definice uvedené zde.

Věta 8.3. *Každý mnohostěn je konvexním obalem množiny svých vrcholů.*

Důkaz. Důkaz je obtížný (zatím nejobtížnější důkaz v tomto textu) a prozatím jej vynecháme.

Mějme konvexní mnohostěn K a neprázdnou podmnožinu Q množiny jeho vrcholů. Konvexní mnohostěn $L \subseteq K$, jehož množina vrcholů je Q, se nazývá *stěna mnohostěnu* K, když má prázdný průnik s konvexním obalem množiny $K \setminus L$.

Jednorozměrná stěna mnohostěnu K se nazývá *hrana*. Nularozměrné stěny jsou právě jednoprvkové množiny tvořené vrcholy mnohostěnu. Mnohostěn sám je roven své (jediné) stěně téže dimenze. Stěna dimenze $\dim K - 1$ se nazývá *nadstěna*. Sjednocení nadstěn konvexního mnohosěnu se nazývá jeho *plášť*.

Neprázdná množina P konečně mnoha konvexních mnohostěnů $K_1, \ldots, K_p$ dimenze n v afinním prostoru A se nazývá *jednoduchý polytop dimenze n* (nebo též *n-polytop*), jestliže průnik libovolných dvou mnohostěnů K_i, K_j je buď prázdná množina, nebo společná nadstěna.

Mnohostěny $K_1, \ldots, K_p$ se nazývají *stěny polytopu* K. Sjednocení stěn polytopu P se nazývá *nosič polytopu* P a označuje $|P|$.

Jednoduchý polytop dimenze 1 se nazývá *jednoduchá lomená čára*, jednoduchý polytop dimenze 2 je *lomená plocha*.

Věta 8.4. *Plášť libovolného konvexního mnohostěnu dimenze alespoň* 1 *je vždy nosičem jednoduchého polytopu.*

Důkaz. Cvičení.

Na závěr kapitoly se ještě stručně zmíníme o dalším význačném typu podmnožin afinního prostoru: o poloprostorech. Mějme bodovou bázi $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ afinního prostoru A dimenze m. Množinu K všech afinních kombinací $c^0 a_0 + c^1 a_1 + \cdots + c^m a_m$ takových, že $c^m \geq 0$, nazýváme *poloprostor určený body* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Číslo m nazýváme *dimenzí poloprostoru* K. Poloprostor dimenze 1 se nazývá *polopřímka*, poloprostor dimenze 2 *polorovina*.

ÚLOHY KE KAPITOLE 8

8.1. Dokažte nebo vyvraťte následující dvě tvrzení pro afinní zobrazení $f : A \to B$:

1. Je-li množina $K \subseteq A$ konvexní, je i množina $f(K) \subseteq B$ konvexní.
2. Je-li množina $L \subseteq B$ konvexní, je i množina $f^{-1}(L) \subseteq A$ konvexní.

8.2. Mějme zobrazení $f : A \to B$ afinních prostorů A a B a předpokládejme, že obraz každé konvexní množiny v A je konvexní množina v B. Plyne z toho, že zobrazení f je afinní?

8.3. Dokažte, že je-li $K \subseteq A$ konvexní mnohostěn a $f : A \to B$ afinní zobrazení, je i $f(K)$ konvexní mnohostěn. Platí, že každý vrchol mnohostěnu K se zobrazením f zobrazí na vrchol mnohostěnu $f(K)$?

8.4. Platí, že každá stěna konvexního mnohostěnu K se afinním zobrazením f zobrazí na stěnu konvexního mnohostěnu $f(K)$? Platí, že každá stěna konvexního mnohostěnu $f(K)$ je obrazem stěny konvexního mnohostěnu K?

8.5. Je konvexní obal každé neprázdné množiny vrcholů konvexního rovnoběžnostěnu jeho stěnou?

8.6. Dokažte, že stěny rovnoběžnostěnu jsou rovnoběžnostěny.

8.7. Dokažte, že každý konvexní mnohostěn dimenze m je průnikem konečně mnoha poloprostorů dimenze m.

Kapitola 9

Orientace

9.1 Orientace afinních prostorů

Mějme dvě bodové báze φ a ψ afinního prostoru A dimenze m. Matice přechodu $M_{\psi,\varphi}$ má inverzi (kterou je matice $M_{\varphi,\psi}$). Je tedy $\det M_{\psi,\varphi} \neq 0$. Řekneme, že báze φ a ψ jsou *souhlasně orientované*, jestliže $\det M_{\psi,\varphi} > 0$.

Věta 9.1. *Relace „býti souhlasně orientované“ je ekvivalence na množině všech bodových bazí afinního prostoru A. Příslušný rozklad má pro $m = 0$ právě jednu třídu a pro $m > 0$ právě dvě třídy.*

Důkaz. Reflexivita: Báze φ je souhlasně orientovaná sama se sebou, protože matice $M_{\varphi,\varphi}$ je jednotková a tedy $\det M_{\varphi,\varphi} = 1 > 0$.

Symetrie: Pokud $\det M_{\psi,\varphi} > 0$, pak

$$\det M_{\varphi,\psi} = \det(M_{\psi,\varphi})^{-1} = \frac{1}{\det M_{\psi,\varphi}} > 0$$

(determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu původní matice).

Tranzitivita: Předpokládejme, že $\det M_{\psi,\varphi} > 0$ a $\det M_{\chi,\psi} > 0$. Jelikož determinant součinu dvou matic je roven součinu jejich determinantů, dostáváme

$$\det M_{\chi,\varphi} = \det(M_{\chi,\psi} \cdot M_{\psi,\varphi}) = \det M_{\chi,\psi} \cdot \det M_{\psi,\varphi} > 0.$$

Na závěr dokážeme tvrzení o počtu tříd rozkladu. Nejprve se vypořádáme s případem $m = 0$. V nularozměrném afinním prostoru existuje právě jedna bodové báze, takže ekvivalence na množině bodových bazí (jediná, která tam existuje) má právě jednu třídu.

Případ $m > 0$ je zajímavější. Začneme volbou dvou bodových bazí φ a ψ afinního prostoru A, které nejsou souhlasně orientované (takové dvě báze vždy existují, viz úlohu 4.15). Platí $M_{\psi,\varphi} < 0$. Pro libovolnou třetí bázi χ platí

$$M_{\chi,\varphi} = M_{\chi,\psi} \cdot M_{\psi,\varphi},$$

takže

$$\det M_{\chi,\varphi} = \det M_{\chi,\psi} \cdot \det M_{\psi,\varphi} = -\det M_{\chi,\psi}$$

a determinanty $\det M_{\chi,\varphi}$ a $\det M_{\chi,\psi}$ mají opačná znaménka. Báze χ je tedy souhlasně orientovaná s φ nebo ψ.

Třídy ekvivalence z předchozí věty se nazývají *orientace afinního prostoru A*. Každý afinní prostor dimenze alespoň 1 má tedy právě dvě orientace. Dvě různé orientace se také nazývají opačné. Každá bodová báze afinního prostoru určuje právě jednu jeho orientaci (tu, do které patří). Pokud je na afinním prostoru zadána orientace, hovoříme o *orientovaném afinním prostoru*. Bodové báze, které do této orientace patří, se nazývají *kladně orientované*. Ostatní jsou *záporně orientované*.

Orientaci na afinním prostoru A lze tedy zadat pomocí libovolné jeho bodové báze $\varphi = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$. K zadání orientace můžeme použít i libovolnou afinní bázi, protože, jak jsme si řekli v podkapitole 4.4, každá afinní báze má jednoznačně určenou asociovanou bázi bodovou. Orientací afinního prostoru A zadanou afinní bazí $\psi = (u_1, \ldots, u_m, a_0)$ rozumíme jeho orientaci zadanou (určenou) asociovanou bodovou bazí $\varphi = (a_0, a_0 + u_1, \ldots, a_0 + u_m)$.

Následující tvrzení ukazuje, že k určení, zda dvě afinní báze určují tutéž orientaci, stačí zjistit determinant matice přechodu mezi jejich vektorovými složkami. To je výhodné, protože tato matice přechodu je menší než matice přechodu mezi bodovými bazemi.

Věta 9.2. *Afinní báze $\varphi = (\alpha, a_0)$ a $\varphi' = (\alpha', a'_0)$ afinního prostoru A určují tutéž orientaci, právě když* $\det \mathrm{M}_{\alpha',\alpha} > 0$.

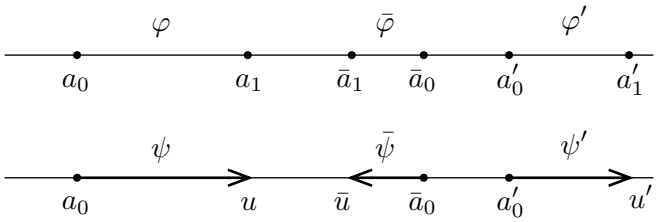
Důkaz. Necháme na čtenáři. Můžete použít výsledek Cv. 4.16.

Podobně jako u bodových bazí rozlišujeme *kladně* a *záporně orientované afinní báze* afinního prostoru podle toho, zda s nimi asociované bodové báze jsou kladně nebo záporně orientované. Podle předchozí věty orientovanost afinní báze (α, a_0) nezávisí na bodu a_0. Proto také hovoříme o *kladně* a *záporně orientovaných vektorových bazích*.

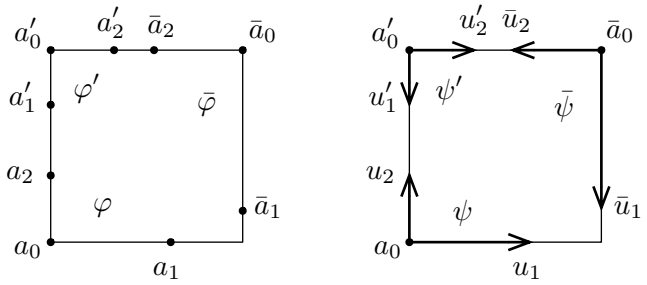
Pojem orientace afinního prostoru osvětlíme na příkladech afinního prostoru dimenze 1, 2 a 3.

Příklad 9.1. Na obr. 9.1 je uvedeno několik příkladů zadání orientace na afinní přímce. Bodové báze φ a φ' určují tutéž orientaci, báze $\bar{\varphi}$ určuje opačnou orientaci. Na pravé straně obrázku jsou znázorněny asociované afinní báze. Je vidět, že báze $\psi = (u, a_0)$ a $\psi' = (u', a'_0)$ určují tutéž orientaci, jelikož vektor u' je kladným násobkem vektoru u. Vektor $\bar{u}$ je záporným násobkem těchto vektorů a báze $\bar{\psi}$ tedy určuje opačnou orientaci.

Příklad 9.2. Na obrázku 9.2 vlevo jsou znázorněny tři bodové báze afinní roviny. Z obrázku lze zhruba odhadnout jednotlivé matice přechodu a jejich determinant. Mělo by vyjít, že báze φ a φ' určují tutéž orientaci a báze $\bar{\varphi}$ orientaci opačnou. Vpravo vidíme asociované báze afinní.



Obrázek 9.1: Nahoře: tři bodové báze afinní přímky: $\varphi = (a_0, a_1)$, $\varphi' = (a'_0, a'_1)$ a $\bar{\varphi} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1)$. Báze φ a φ' jsou souhlasně orientované, báze $\bar{\varphi}$ je s nimi orientována nesouhlasně. Dole: asociované afinní báze.



Obrázek 9.2: Vlevo: Tři bodové báze afinní roviny: $\varphi = (a_0, a_1, a_2)$, $\varphi' = (a'_0, a'_1, a'_2)$ a $\bar{\varphi} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$. Báze φ a φ' jsou souhlasně orientované, báze $\bar{\varphi}$ je s nimi orientována nesouhlasně. Vpravo: asociované afinní báze.

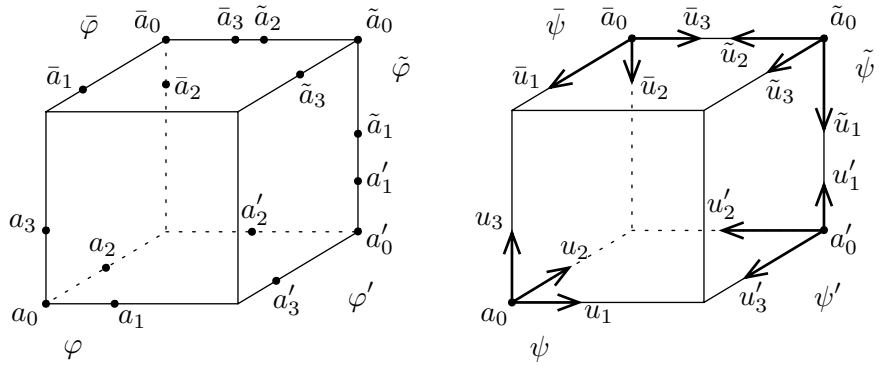
Příklad 9.3. Na obrázku 9.3 vlevo vidíme čtyři bodové báze trojrozměrného afinního prostoru. Opět můžeme odhadnout jednotlivé matice přechodu a odvodit, které dvojice bazí jsou souhlasně orientované. Vpravo jsou asociovené afinní báze.

Na afinním prostoru $\mathbf{R}^m$ určuje kanonická afinní báze orientaci, která se nazývá *standardní*. Afinní prostor $\mathbf{R}^m$ uvažujeme (pokud není řečeno jinak) se standardní orientací.

9.2 Orientace na podmnožinách

Na nadrovině v orientovaném afinního prostoru lze zadat orientaci pomocí tzv. vnějšího bodu nebo vnějšího vektoru. K tomu je třeba nejprve dokázat pomocné tvrzení:

Věta 9.3. *Mějme nadrovinu B orientovaného afinního prostoru A dimenze m a bod $a \notin B$. Dále mějme dvě bodové báze $\varphi = (a_0, \ldots, a_{m-1})$ a $\varphi' = (a'_0, \ldots, a'_{m-1})$ nadroviny B. Pak tyto dvě báze jsou souhlasně orientované, právě když jsou souhlasně orientované bodové báze $\psi = (a_0, \ldots, a_{m-1}, a)$ a $\psi' = (a'_0, \ldots, a'_{m-1}, a)$ afinního prostoru A.*



Obrázek 9.3: Čtyři bodové báze trojrozměrného afinního prostoru (vlevo): $\varphi = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $\varphi' = (a'_0, a'_1, a'_2, a'_3)$ a $\bar\varphi = (\bar a_0, \bar a_1, \bar a_2, \bar a_3)$, $\tilde\varphi = (\tilde a_0, \tilde a_1, \tilde a_2, \tilde a_3)$ a asociované afinní báze (vpravo).

Důkaz. Stačí si uvědomit, jak vypadá matice přechodu $M_{\psi',\psi}$:

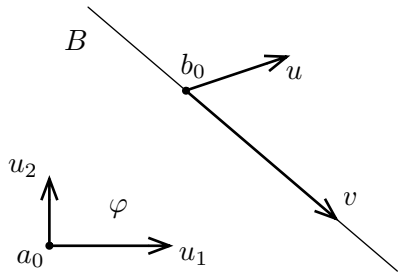
$$M_{\psi',\psi} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M_{\varphi',\varphi} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Z Věty 9.3 plyne, že k libovolné nadrovině $B \subseteq A$ a bodu $a \in A \setminus B$ existuje právě jedna orientace na afinním prostoru B taková, že bodová báze $(a_0, \ldots, a_{m-1})$ prostoru B je kladně orientovaná, právě když bodová báze $(a_0, \ldots, a_{m-1}, a)$ prostoru A je kladně orientovaná. Této orientaci nadroviny B říkáme *orientace vnějším bodem* a.

Orientaci na nadrovině $B \subseteq A$ můžeme také zadat pomocí vektoru. Označme U zaměření orientovaného afinního prostoru A a V zaměření nadroviny B. *Orientace nadroviny* B *vnějším vektorem* $u \in U \setminus V$ je orientace, pro kterou je vektorová báze $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ zaměření V souhlasně orientovaná, právě když je vektorová báze $(v_1, \ldots, v_{m-1}, u)$ zaměření U souhlasně orientovaná.

Příklad 9.4. Na obrázku 9.4 je znázorněna afinní přímka B v afinní rovině A a vektor $u \notin V$. Orientace afinní roviny A je dána afinní bazí φ. Vektor u určuje orientaci přímky B danou vektorovou bazí (v), protože báze (v, u) je souhlasně orientovaná.

Pojem orientace lze zavést i na jiných podmnožinách afinních prostorů, než jsou afinní podprostory. Je-li $K \subseteq A$ konvexní množina dimenze k, tvoří libovolných jejích $k+1$ bodů



Obrázek 9.4: Orientace afinní nadroviny vnějším vektorem.

bodovou bázi afinního prostoru $\mathrm{Aff}(K)$. *Orientaci množiny* K lze zavést pomocí matic přechodu takových bodových bazí podobným způsobem, jako jsme zavedli orientaci afinního prostoru. Konvexní množinu nazýváme *orientovanou*, je-li na ní zadána orientace.

Každá orientace konvexní množiny K definuje orientaci afinního prostoru $\mathrm{Aff}(K)$ a naopak, protože libovolná $(k+1)$-tice $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ bodů množiny K v obecné poloze definuje orientaci jak na množině K, tak na afinním prostoru $\mathrm{Aff}(K)$.

Je-li afinní prostor A orientovaný a $k = \dim A$, uvažujeme množinu K vždy s orientací, která odpovídá orientaci prostoru A. Je-li $k = \dim A - 1$, lze na množině K zavést orientaci vnějším bodem nebo vektorem jako orientaci vnějším bodem či vektorem nadroviny, kterou tato množina generuje.

Na závěr této části ještě stručně ukážeme, jak lze zavést orientaci na jednoduchých polytopech.

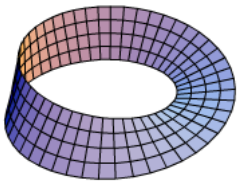
Mějme dva orientované konvexní mnohostěny K_1 a K_2 dimenze k jejichž průnikem je konvexní mnohostěn L, který je nadstěnou každého z nich. Řekneme, že mnohostěny K_1 a K_2 jsou *souhlasně orientované*, jestliže existují body $b_1, \ldots, b_k \in L$, $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2$ takové, že $(b_1, \ldots, b_k, a_1)$ je kladně orientovaná bodová báze v $\mathrm{Aff}(K_1)$ a $(b_1, \ldots, b_k, a_2)$ je záporně orientovaná bodová báze v $\mathrm{Aff}(K_2)$.

Jednoduchý polytop P v afinním prostoru A se nazývá *orientovaný*, je-li na každé jeho stěně dána orientace tak, že každé dvě stěny, které mají neprázdný průnik, jsou souhlasně orientované. Jednoduchý polytop se nazývá *orientovatelný*, pokud může být orientovaný.

Příklad 9.5. Známá Möbiova páska (obr. 9.5), je-li vytvořena jako polytop dimenze 2, není orientovatelná.

9.3 Orientovaná afinní zobrazení

Je-li afinní transformace $f : A \to A$ bijektivní, pak pro každou bodovou bázi $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ afinního prostoru A platí, že $(m+1)$-tice $(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_m))$ je rovněž afinní báze. O afinní transformaci f říkáme, že je *orientovaná*, jsou-li tyto dvě báze souhlasně orientované.



Obrázek 9.5: Möbiova páska.

Příklad 9.6. Posunutí o libovolný vektor je orientovaná afinní transformace.

ÚLOHY KE KAPITOLE 9

9.1. Dokažte, že dvě afinní báze afinního prostoru jsou souhlasně orientované, právě když má jejich matice přechodu kladný determinant.

9.2. Uveďte příklad jednoduchého polytopu, který může být orientován čtyřmi různými způsoby.

9.3. Dokažte, že afinní transformace je orientovaná, právě když má její matice vzhledem k libovolné afinní bázi kladný determinant.

9.4. Dokažte, že bijektivní afinní transformace $f : A \to A$ s podřízeným lineárním zobrazením $\lambda : U \to U$ je orientovaná právě když pro libovolnou afinní bázi $\varphi = (u_1, u_2, \ldots, u_m, a_0)$ je vektorová báze $(\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_m))$ vektorového prostoru U souhlasně orientovaná s vektorovou bazí $(u_1, \ldots, u_m)$.

9.5. Je středová souměrnost v afinním prostoru A orientovaná afinní transformace?

Kapitola 10

Vektorové prostory se skalárním součinem

Skalární součin na vektorovém prostoru je struktura, pomocí níž lze definovat délku vektoru a odchylku mezi vektory. V této kapitole uvádíme základní vlastnosti skalárního součinu, které budeme potřebovat v další kapitole. Mnoho pojmů čtenář už zná z předchozího studia.

10.1 Skalární součin

Skalární součin na vektorovém prostoru U je zobrazení $\cdot : U \times U \to \mathrm{R}$, které je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou, což znamená, že pro každé tři vektory $u, v, w \in U$ a dva skaláry $c, d \in \mathrm{R}$ platí

$$u \cdot u > 0 \quad \text{pro } u \neq 0, \qquad \text{(pozitivní definitnost)}$$
$$u \cdot v = v \cdot u, \qquad \text{(symetrie)}$$
$$(cu + dv) \cdot w = c(u \cdot w) + d(v \cdot w). \qquad \text{(linearita v prvním argumentu)}$$

Vektorové prostory se skalárním součinem se někdy nazývají *unitární prostory*. V celé této kapitole budeme pracovat s vektorovým prostorem U dimenze m, na kterém je dán skalární součin.

Na vektorovém prostoru R^n je definován tzv. *standardní skalární součin* známým předpisem

$$u \cdot v = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^n v^n, \tag{10.1}$$

kde u^i resp. v^i jsou složky vektorů u resp. v.

Z definice lze odvodit další vztahy platné pro skalárního součin, například

$$u \cdot 0 = 0, \tag{10.2}$$
$$w \cdot (cu + dv) = c(w \cdot u) + d(w \cdot v). \qquad \text{(linearita ve druhém argumentu)}$$

Podmínkám linearity v prvním a druhém argumentu říkáme dohromady podmínka *bilinearity*. Díky ostatním vlastnostem skalárního součinu ovšem druhá plyne z první.

Vektory $u, v \in U$ se nazývají *kolmé* (*ortogonální*), jestliže $u \cdot v = 0$.

Základní vlastností skalárního součinu je *Schwarzova nerovnost*. Uvádíme ji v následující větě. V literatuře najdeme mnoho různých důkazů Schwarzovy nerovnosti, žádný z nich není příliš intuitivní (podobně jako sama nerovnost). Důkaz vybraný zde má alespoň tu výhodu, že je krátký. Nejprve ale uvedeme samotnou nerovnost.

Věta 10.1 (Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory u a v prostoru U platí*

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v). \tag{10.3}$$

Rovnost nastává, právě když jsou vektory u a v lineárně závislé.

Důkaz. Jsou-li vektory u a v lineárně závislé, je u násobkem v nebo v násobkem u. V obou případech snadno dostaneme, že se levá a pravá strana nerovnosti (10.3) rovnají.

Nyní předpokládejme, že vektory u a v jsou lineárně nezávislé. Pro libovolné číslo x pak platí $(xu+v)\cdot(xu+v) > 0$. Z bilinearity dostáváme

$$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + v \cdot v > 0.$$

Vlevo máme kvadratický polynom v proměnné x. Jeho diskriminant

$$D = 4(u \cdot v)^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

musí být záporný, což znamená přesně $(u \cdot v)^2 < (u \cdot u)(v \cdot v)$.

Vektor $u \in U$ se nazývá *kolmý na vektorový podprostor* $V \subseteq U$, jestliže je kolmý na libovolný vektor $v \in V$. *Ortogonální doplněk vektorového podprostoru* $V \subseteq U$ je vektorový podprostor U, složený z vektorů kolmých ke každému vektoru z V. Dva vektorové podprostory $V_1, V_2 \subseteq U$ jsou *kolmé* (*ortogonální*), jsou-li libovolné dva vektory $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ kolmé.

10.2 Délka a odchylka

Délka vektoru u (také *norma*) se značí $\|u\|$ a je definována předpisem

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}. \tag{10.4}$$

Pokud $\|u\| = 1$, vektor se nazývá *jednotkový*. Každý vektor má nenulovou délku, právě když je nenulový. Z libovolného nenulového vektoru můžeme vytvořit jednotkový vektor tzv. *normováním*, které spočívá ve vynásobení vektoru převrácenou hodnotou jeho délky:

$$u_0 = \frac{1}{\|u\|} u.$$

Pomocí délek vektorů lze Schwarzovu nerovnost přepsat takto:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|. \tag{10.5}$$

S použitím této nerovnosti můžeme celkem snadno dokázat tři základní vlastnosti délky vektoru:

Věta 10.2. *Pro libovolné dva vektory $u, v \in U$ a číslo $c \in \mathrm{R}$ platí*

$$\|u\| > 0 \quad \text{pro } u \neq 0, \tag{10.6}$$

$$\|cu\| = |c| \|u\|, \tag{10.7}$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{10.8}$$

Podmínce (10.8) se říká *trojúhelníková nerovnost.*

Důkaz Věty 10.2. První dvě podmínky plynou přímo z definice skalárního součinu. Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost. Podle nerovnosti (10.5) a vlastností skalárního součinu platí

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2(u\cdot v) + v\cdot v = \|u\|^2 + 2(u\cdot v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|u\cdot v| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

odkud již trojúhelníková nerovnost snadno plyne.

Podmínky (10.6), (10.7) a (10.8) se v matematice používají k definici délky vektoru na vektorovém prostoru, která není vypočítána ze skalárního součinu pomocí vztahu (10.4). Následující příklad ukazuje dva nejdůležitější příklady, které se používají i v informatice (analýze dat).

Příklad 10.1. Následující dvě zobrazení $\|\cdot\|_1 : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ a $\|\cdot\|_\infty : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ splňují podmínky (10.6), (10.7) a (10.8):

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \left|u^1\right| + \left|u^2\right| + \cdots + \left|u^m\right|, \\ \|u\|_\infty &= \max\left(\left|u^1\right|, \left|u^2\right|, \ldots, \left|u^m\right|\right). \end{aligned}$$

Nyní ukážeme, jak lze pomocí skalárního součinu a délky vektoru definovat odchylku vektorů. Podle nerovnosti (10.5) platí

$$\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1,$$

takže arkus kosinus v následující definici vždy existuje. *Odchylka $\vartheta_{u,v}$ vektorů u a v* je definována předpisem

$$\vartheta_{u,v} = \arccos \frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}. \tag{10.9}$$

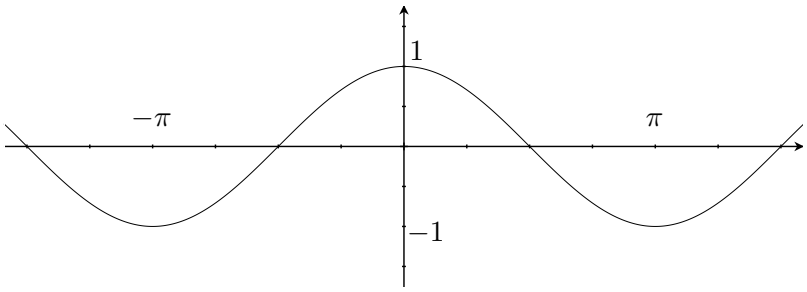
Z této definice vyplývá následující vztah mezi skalárním součinem vektorů u a v a jejich odchylkou $\vartheta_{u,v}$:

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \vartheta_{u,v} \tag{10.10}$$

Příklad 10.2. Jsou-li vektory u a v jednotkové, dostáváme ze vztahu (10.10)

$$u \cdot v = \cos \vartheta_{u,v},$$

což nám umožní udělat si dobrou představu o skalárním součinu jednotkových vektorů: je to kosinus úhlu, který svírají. Na obrázku 10.1 vidíme graf funkce kosinus. Z něj by mělo



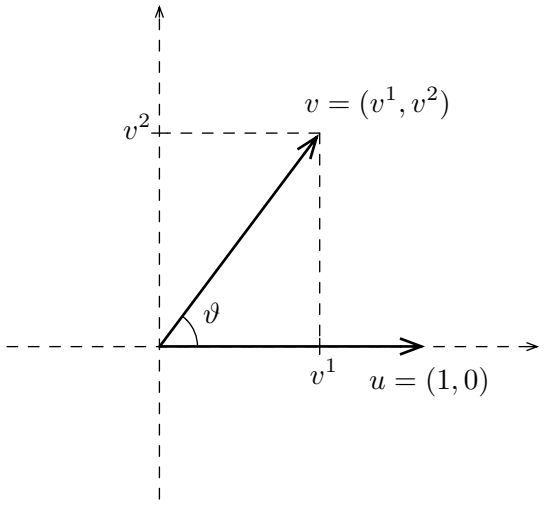
Obrázek 10.1: Graf funkce cos

být patrné, že pokud vektory svírají úhel $\frac{\pi}{2}$, je jejich skalární součin nulový ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$) a pokud jsou totožné (a tedy jejich odchylka je nulová), je jejich skalární součin roven jedné ($\cos 0 = 1$). To také odpovídá tomu, že tyto vektory jsou jednotkové. Skalární součin opačných jednotkových vektorů je -1 a odchylka π.

Příklad 10.3. V minulém příkladu je ovšem jedna záludnost: odchylku vektorů jsme pomocí skalárního součinu *definovali*, takže okolnost, že skalární součin jednotkových vektorů je roven kosinu jejich odchylky, je vlastně triviální a neobsahuje žádnou novou informaci. Zajímavou se stane v momentě, kdy nějak ověříme, že definice odchylky vektorů pomocí vztahu (10.9) odpovídá pozorované skutečnosti, konkrétně tomu, co o funkci kosinus víme z elementární geometrie.

Obrázek 10.2 znázorňuje dva jednotkové vektory $u, v \in \mathbf{R}^2$. Vektor u je roven $(1,0)$, vektor v je obecný, $v = (v^1, v^2)$. Standardní skalární součin $u \cdot v$ je roven $1v^1 + 0v^2 = v^1$. Pro kosinus úhlu ϑ platí $\cos \vartheta = v^1 / \|v\|$ (podíl délek přilehlé odvěsny a přepony v pravoúhlém trojúhelníku), je tedy také roven v^1.

Kdybychom vektory u a v „pootočili“ tak, aby zůstaly zachovány jejich délky i úhel ϑ, zůstane jejich skalární součin pořád stejný. Proč tomu tak je, zjistíme později.



Obrázek 10.2: Jednotkové vektory $u, v \in \mathrm{R}^2$. Vidíme, že $\cos\vartheta = v^1$, což je rovno (standardnímu) skalárnímu součinu $u \cdot v$.

Další poznatky, které uvedeme na závěr této části, vyplývají z následujícího vyjádření délky rozdílu dvou vektorů:

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u - v\cdot u - u\cdot v + v\cdot v \\ &= \|u\|^2 - 2(u\cdot v) + \|v\|^2,\end{aligned}$$

takže

$$2(u\cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2. \tag{10.11}$$

Tato rovnost je zajímavá hned z několika důvodů. Za prvé ukazuje, že skalární součin vektorů u a v lze spočítat čistě pomocí délek vektorů u, v a $u-v$. Této skutečnosti později využijeme.

Za druhé, levá strana rovnosti je nulová právě když je nulová strana pravá, což vede k následující verzi známé Pythagorovy věty:

Věta 10.3 (Pythagorova)**.** *Pro každé dva vektory u a v platí*

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2,$$

právě když jsou ortogonální.

A za třetí, podle (10.10) a (10.11):

Věta 10.4 (kosinová)**.** *Pro libovolné dva vektory u a v platí*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u\|\,\|v\|\cos\vartheta_{u,v} = \|u-v\|^2. \tag{10.12}$$

10.3 Ortonormální báze

Následující věta potvrzuje očividnou skutečnost: nenulové ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé.

Věta 10.5. *Mějme k nenulových vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ a předpokládejme, že libovolné dva z nich jsou kolmé. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Důkaz. Podle definice lineární nezávislosti máme vyřešit rovnici

$$c^1 u_1 + c^2 u_2 + \cdots + c^k u_k = 0.$$

Vynásobme levou stranu jedním z těchto vektorů, vektorem u_i:

$$(c^1 u_1 + c^2 u_2 + \cdots + c^k u_k) \cdot u_i = c^1 (u_1 \cdot u_i) + c^2 (u_2 \cdot u_i) + \cdots + c^k (u_k \cdot u_i).$$

Jelikož vektor u_i je kolmý ke všem ostatním vektormům, je tento výraz roven $c^i (u_i \cdot u_i) = c^i \|u_i\|$. Jelikož na pravé straně máme $0 \cdot u_i = 0$ (skalární součin nulového vektoru a vektoru u_i je roven nule), musí platit

$$c^i \|u_i\| = 0.$$

Délka vektoru u_i je ovšem podle předpokladu nenulová, takže musí být $c^i = 0$. Tuto úvahu můžeme udělat pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, takže dostáváme $c^1 = c^2 = \cdots = c^k = 0$, což znamená lineární nezávislost vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Je-li v k-tici $(e_1, \ldots, e_k)$ vektorů v U každý vektor nenulový a libovolné dva jsou kolmé, nazývá se tato k-tice *ortogonální systém vektorů*. Pokud $k = m$, je podle předchozí věty $\alpha = (e_1, \ldots, e_k)$ báze vektorového prostoru U. Nazývá se *ortogonální báze*. Pokud je navíc každý vektor z α jednotkový, říkáme, že je tato báze *ortonormální*. V takovém případě pro vektory báze α platí

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{když } i = j \text{ a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro ortonormální bázi je snadné počítat souřadnice vektorů. Pokud totiž pro ortonormální bázi $\alpha = (e_1, \ldots, e_m)$ a vektor v platí

$$v = c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^m e_m,$$

pak pro skalární součin s vektorem e_i platí

$$\begin{aligned} v \cdot e_i &= (c^1 e_1 + c^2 e_2 + \cdots + c^m e_m) \cdot e_i \\ &= c^1 (e_1 \cdot e_i) + c^2 (e_2 \cdot e_i) + \cdots + c^m (e_m \cdot e_i) \\ &= c^i \end{aligned}$$

(podobný výpočet jsme už dělali v důkazu Věty 10.5), takže i-tá souřadnice vektoru v vzhledem k bázi α je $v \cdot e_i$.

Gram-Schmidtova ortogonalizace je známá metoda, která z libovolné báze vektorového prostoru se skalárním součinem vytvoří ortogonální bázi. Pokud potřebujeme získat bázi ortonormální, výsledné vektory pak normujeme.

Máme-li vektory vyjádřeny v ortonormální bázi, lze jejich skalární součin snadno vypočítat z jejich souřadnic. Jak, to ukazuje následující věta. Než ji uvedeme, připomeňme, že pro vektory $u, v \in U$ symboly u_α, v_α označujeme jejich souřadnicová vyjádření v bázi α. To jsou prvky vektorového prostoru R^m (je-li $m = \dim U$) a můžeme je tedy vynásobit standardním skalárním součinem.

Věta 10.6. *Je-li α ortonormální báze vektorového prostoru U, platí pro libovolné dva vektory $u, v \in U$*

$$u \cdot v = u_\alpha \cdot v_\alpha. \tag{10.13}$$

Důkaz. Ve výrazu vlevo stačí vektory vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze α a využít toho, že jde o ortonormální bázi. Detaily necháme na čtenáři.

Je třeba mít na paměti, že vztah (10.13) platí, jedině když je báze α ortonormální. Jeho použití v jiných situacích by vedlo k nesprávným výsledkům.

Následující věta se zabývá tvarem matice přechodu mezi ortonormálními bazemi (M^{T} značí matici transponovanou k matici M).

Věta 10.7. *Pro libovolné dvě ortonormální báze α a β platí*

$$\mathrm{M}_{\alpha,\beta} = \mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

Důkaz. $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$ je, jak víme, inverzní matice k matici $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$. Chceme tedy dokázat, že $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{-1} = \mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}$, neboli že $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{E}_m$. Matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ má ve sloupcích souřadnicová vyjádření vektorů báze α v bázi β. Označíme-li $\alpha = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, je tedy její i-tý sloupec roven vektoru $(e_i)_\beta$. Stejnému vektoru, psanému do řádku, je roven i řádek matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}}$. Hodnota na pozici (i, j) v matici $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ je tedy rovna standardnímu skalárnímu součinu $(e_i)_\beta \cdot (e_j)_\beta$. Podle Věty 10.6 a díky ortonormálnosti báze β ovšem $(e_i)_\beta \cdot (e_j)_\beta = e_i \cdot e_j$. Báze α je ovšem rovněž ortonormální, takže tato hodnota je rovna 1 když $i = j$ a jinak je rovna 0. Jinými slovy, matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ je jednotková.

Věta 10.7 má praktický význam, protože usnadňuje výpočet matice přechodu mezi vektorovými bazemi, pokud jsou tyto báze ortonormální. Místo složitého výpočtu inverzní matice stačí matici transponovat. Jak uvidíme v další kapitole, ortonormální vektorové báze se v počítačové grafice často používají.

Věta 10.7 rovněž říká, že sloupce matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ tvoří (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) ortonormální bázi prostoru R^m. Takovým maticím se říká *ortogonální*

matice (kupodivu; správný termín by byl spíš ortonormální matice). Ortogonální matice jsou právě čtvercové matice M, které splňují $M^{-1} = M^{\mathrm{T}}$. Z tohoto vztahu snadno odvodíme, že $|\det M| = 1$.

Příklad 10.4. Předpokládejme, že $\dim U = 3$, báze α a β prostoru U jsou ortonormální a jejich matice přechodu je

$$\mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Můžete se přesvědčit, že matice je vskutku ortogonální, tedy že její sloupce tvoří ortonormální bázi v R^3. Transponovaná matice je rovněž ortogonální (je to matice $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$), takže i řádky matice $\mathrm{M}_{\beta,\alpha}$ jsou ortonormální báze R^3. Platí $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}_{\beta,\alpha} \cdot \mathrm{M}_{\beta,\alpha} = \mathrm{E}_3$. Ve sloupcích matice jsou souřadnicová vyjádření vektorů báze α v bázi β a v řádcích souřadnicová vyjádření vektorů báze β v bázi α.

10.4 Vektorový součin

Předpokládejme, že vektorový prostor je orientovaný a má dimenzi alespoň 2 (tedy $m \geq 2$) a zvolme v něm kladně orientovanou ortonormální bázi α. Pro libovolných $m-1$ vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1} \in U$ definujme zobrazení $\mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}} : U \to \mathrm{R}$ předpisem

$$P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det \begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_{m-1}^1 & u^1 \\ u_1^2 & \cdots & u_{m-1}^2 & u^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^m & \cdots & u_{m-1}^m & u^m \end{pmatrix}, \tag{10.14}$$

kde horními indexy značíme souřadnice vektorů v bázi α jako obvykle.

Věta 10.8. *Hodnota $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$ nezávisí na volbě báze α.*

Důkaz. Označme matici ve vztahu (10.14) symbolem N. Dále zvolme další ortonormální kladně orientovanou bázi $\bar{\alpha}$ a označme symbolem $\bar{N}$ matici sestavenou stejně jako matice N, ale pomocí souřadnic v bázi $\bar{\alpha}$. Konečně, položme $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det \bar{N}$. Naším cílem je ukázat, že $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$. To ovšem nebude obtížné. Je totiž $\bar{N} = \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot N$, takže $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det \bar{N} = \det(\mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot N) = \det \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} \cdot \det N$. Jelikož báze α a $\bar{\alpha}$ jsou ortonormální a souhlasně orientované, je $\det \mathrm{M}_{\bar{\alpha},\alpha} = 1$, takže $\bar{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$.

Determinant ve vztahu (10.14) lze vypočítat rozvojem podle posledního sloupce. Dostaneme

$$P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = v^1 u^1 + v^2 u^2 + \cdots + v^m u^m,$$

kde čísla $v^1, v^2, \dots, v^m$ jsou vypočítána ze souřadnic vektorů $u_1, \dots, u_{m-1}$. Hodnota $P_{u_1,\dots,u_{m-1}}(u)$ je tedy vypočítána jako skalární součin vektoru u s vektorem v, jehož souřadnice v bázi α jsou $v^1, v^2, \dots, v^m$. S pomocí tvrzení z úlohy 10.7 lze snadno ověřit, že vektor v nezávisí na tom, v jaké bázi jsme jeho souřadnice počítali. Je to tedy určitý významný vektor, který je dán vektory $u_1, \dots, u_{m-1}$. Říká se mu *vektorový součin vektorů* $u_1, \dots, u_{m-1}$ a značí se $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$ pro $m \geq 3$ a $u_1^\times$ pro $m = 2$.

Vektorový součin obvykle není definován takto obecně, ale jen pro $m = 3$. Zde jsme uvedli definici obecnější v naději, že díky tomu čtenáři snadněji pochopí principy, které jsou za vektorovým součinem skryty.

Je třeba mít na paměti, že vzorec (10.14) předpokládá, že vektory jsou vyjádřeny vzhledem k ortonormální bázi. Pokud tento předpoklad porušíme, nevyjde nám vektorový součin správně.

Příklad 10.5. Je-li dimenze vektorového prostoru U rovna 3 (což je, jak jsme si už řekli, obvyklý případ, ve kterém vektorový součin počítáme), je vektorový součin definován pro dvojice vektorů. Pro vektory $u_1, u_2 \in U$ a libovolný vektor $u \in U$ pak platí (počítáno v souřadnicích vzhledem k nějaké ortonormální bázi α)

$$\begin{aligned}(u_1 \times u_2) \cdot u &= \det \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u^3 \end{pmatrix} \\ &= (u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2)u^1 + (u_1^3 u_2^1 - u_1^1 u_2^3)u^2 + (u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1)u^3,\end{aligned}$$

takže

$$(u_1 \times u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2 \\ u_1^3 u_2^1 - u_1^1 u_2^3 \\ u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1 \end{pmatrix}. \tag{10.15}$$

Příklad 10.6. Vektorový součin ovšem často počítáme i v dimenzi 2, ačkoli o tom nevíme. Pro vektory u a v v dvojrozměrném vektorovém prostoru U totiž platí (opět vyjádřeno v souřadnicích vzhledem k nějaké ortonormální bázi α):

$$u^\times \cdot v = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = -u^2 v^1 + u^1 v^2,$$

takže

$$(u^\times)_\alpha = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix},$$

$u^\times$ je tedy vektor, který jsme zvyklí používat jako vektor kolmý k vektoru u.

Následující věta uvádí základní vlastnosti vektorového součinu. Další se dozvíme v příští kapitole.

Věta 10.9. *Vektorový součin $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$ je kolmý na každý z vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$. Je nenulový, právě když jsou vektory $u_1, \ldots, u_{m-1}$ lineárně nezávislé. V takové případě je báze $\beta = (u_1, \ldots, u_{m-1}, u_1 \times \cdots \times u_{m-1})$ kladně orientovaná.*

Důkaz. Položme $v = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{m-1}$. Pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ je $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u_i) = 0$, protože je to determinant matice se dvěma shodnými sloupci. Ale $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u_i) = v \cdot u_i$, takže vektory v a u_i jsou kolmé.

Jsou-li vektory $u_1, \ldots, u_{m-1}$ lineárně závislé, je $v = 0$, protože je to determinant matice s lineárně závislými sloupci.

Předpokládejme naopak, že $v = 0$. Jelikož počet vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$ je menší než dimenze vektorového prostoru U, existuje vždy vektor u, který není jejich lineární kombinací. Jelikož $v = 0$, platí $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = v \cdot u = 0$. Číslo $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$ je ovšem determinant matice, jejíž poslední sloupec není lineární kombinací ostatních sloupců. Jelikož je nulový, musí být tyto sloupce lineárně závislé, což znamená lineární závislost vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$.

Na závěr ukážeme, že báze β je kladně orientovaná. Zvolme ortonormální kladně orientovanou bázi α. Matice, jejímž determinantem je číslo $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(v)$, obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů báze β v bázi α. Je to tedy matice přechodu od báze β k bázi α a platí $P_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(v) = \det \mathbf{M}_{\alpha,\beta}$. Tento determinant je ovšem roven $v \cdot v = \|v\|^2$, takže je kladný.

Tím je věta dokázána.

Příklad 10.7. Mějme v trojrozměrném vektorovém prostoru U vektory u_1 a u_2, jejichž vyjádření vzhledem k ortonormální bázi α je

$$(u_1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorový součin těchto vektorů (lépe řečeno jeho souřadnice v bázi α) můžeme vypočítat přímo pomocí vztahu (10.15). Pohodlnější je ale postupovat podle definice:

$$(u_1 \times u_2) \cdot v = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & v^1 \\ 0 & 1 & v^2 \\ 0 & 1 & v^3 \end{pmatrix} = -v^2 + v^3,$$

takže

$$(u_1 \times u_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme snadno ověřit, že vektorový součin $u_1 \times u_2$ splňje všechno, co o něm říká Věta 10.9.

10.5 Izometrie

V této části předpokládáme, že máme dva vektorové prostory se skalárním součinem U a V a že $\dim U = \dim V = m$.

Lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ se nazývá *izometrie*, jestliže pro libovolné dva vektory $u_1, u_2 \in U$ platí

$$\lambda(u_1) \cdot \lambda(u_2) = u_1 \cdot u_2. \tag{10.16}$$

Stručně řečeno, izometrie je lineární zobrazení, které zachovává skalární součin. Následující věta ukazuje, že v důsledku toho zachovává i všechny struktury, které jsou pomocí skalárního součinu definovány:

Věta 10.10. *Je-li $\lambda : U \to V$ izometrie, pak pro libovolné vektory $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m \in U$ platí*

1. $\|\lambda(u)\| = \|u\|$.
2. $\vartheta_{\lambda(u_1),\lambda(u_2)} = \vartheta_{u_1,u_2}$.
3. *Je-li $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ortonormální báze prostoru U, pak $(\lambda(u_1), \lambda(u_2), \ldots, \lambda(u_m))$ je ortonormální báze prostoru V.*
4. *Jsou-li prostory U a V i zobrazení λ orientované, pak*

$$\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1}) = \lambda(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}).$$

Důkaz. Tvrzení 1, 2 a 3 plynou přímo z definic, konkrétně ze vztahů (10.4) a (10.9). Tvrzení 4 dokážeme později.

Důsledkem tvrzení 3 je, že zobrazení λ je izomorfismus vektorových prostorů.

Následující tvrzení ukazuje, že matice izometrie vzhledem k ortonormálním bazím je ortogonální:

Věta 10.11. *Mějme ortonormální bázi α vektorového prostoru U a ortonormální bázi β vektorového prostoru V. Pak lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ je izometrie, právě když matice $\mathbf{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ je ortogonální.*

Důkaz. Označme vektory báze α jako $e_1, \ldots, e_m$. Jelikož λ je izometrie, tvoří vektory $\lambda(e_1), \ldots, \lambda(e_m)$ ortonormální bázi prostoru V: ortogonální jsou přímo podle definice izometrie, jednotkové jsou podle tvrzení 1 Věty 10.10. Sloupce matice $\mathbf{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ jsou souřadnicová vyjádření obrazů vektorů báze α v bázi β; i-tý sloupec matice je tedy $\lambda(e_i)_\beta$. Jelikož báze β je ortonormální, je matice ortogonální podle (10.13).

Věta 10.11 nám umožní dokončit důkaz věty předchozí.

Důkaz tvrzení 4 Věty 10.10. Podle definice vektorového součinu pro libovolný vektor $u \in U$ je $(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot u = \mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u) = \det N$, kde matice N má ve sloupcích souřadnicová vyjádření vektorů $u_1, \ldots, u_{m-1}$ a u v kladně orientované ortonormální bázi α. Obrazy $\lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_{m-1})$ a $\lambda(u)$ těchto vektorů mají v kladně orientované ortonormální bázi β vektorového prostoru V souřadnicová vyjádření ve sloupcích matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot N$, takže

$$\mathrm{P}_{\lambda(u_1),\ldots,\lambda(u_{m-1})}(\lambda(u)) = \det(\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot N) = \det \mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha} \cdot \det N.$$

Matice $\mathrm{M}^{\lambda}_{\beta,\alpha}$ je ovšem podle Věty 10.11 ortogonální, takže její determinant je roven 1 nebo -1. Jelikož zobrazení λ je orientované, je roven 1. Celkově tedy dostáváme $\mathrm{P}_{\lambda(u_1),\ldots,\lambda(u_{m-1})}(\lambda(u)) = \det N = \mathrm{P}_{u_1,\ldots,u_{m-1}}(u)$.

Pro libovolný vektor $u \in U$ tedy platí

$$(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot u = (\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1})) \cdot f(u).$$

Vzhledem k tomu, že zobrazení λ je izometrie, můžeme ještě levou stranu změnit:

$$\lambda(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot \lambda(u) = (\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1})) \cdot f(u).$$

Jelikož zobrazení λ je bijekce (což je důsledek tvrzení 3 Věty 10.10), každý vektor $v \in V$ je obrazem nějakého vektoru z prostoru U. Proto pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$\lambda(u_1 \times \cdots \times u_{m-1}) \cdot v = (\lambda(u_1) \times \cdots \times \lambda(u_{m-1})) \cdot v,$$

což už znamená rovnost, kterou jsme chtěli dokázat (srovnejte s úlohou 10.7).

ÚLOHY KE KAPITOLE 10

10.1. Dokažte, že vektory u a v jsou ortogonální, právě když

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

10.2. Najděte (nestandardní) skalární součin v R^2 takový, aby vektory $(2,0)$ a $(1,10)$ tvořily ortonormální bázi. Kolik takových skalárních součinů existuje?

10.3. Mějme bázi α vektorového prostoru U dimenze m a definujme skalární součin na U předpisem

$$u \cdot v = u_\alpha \cdot v_\alpha$$

(na pravé straně je standardní skalární součin v R^m souřadnicových vyjádření vektorů u a v v bázi α). Ukažte, že opravdu jde o skalární součin. Dále dokažte, že vzhledem k tomuto skalárnímu součinu je α ortonormální báze.

10.4. Uveďte příklad vektorového prostoru se skalárním součinem U, jeho báze α a vektorů $u, v \in U$ tak, aby neplatil vztah (10.13).

10.5. Dokažte, že vektor je nulový, právě když je kolmý na libovolný vektor.

10.6. V příkladě 10.1 jsme ukázali dva jiné způsoby zavedení délky vektoru v $\mathbf{R}^m$ než s použitím standardního skalárního součinu: pomocí zobrazení $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$. Lze pomocí těchto zobrazení a vztahu (10.11) zavést na $\mathbf{R}^m$ skalární součin?

10.7. Ukažte, že pro libovolné lineární zobrazení $\lambda : U \to \mathbf{R}$ existuje nenulový vektor $v_\lambda \in U$ takový, že funkční hodnoty zobrazení λ se dají počítat jako skalární součin s vektorem v_λ:

$$\lambda(u) = v_\lambda \cdot u.$$

Ukažte, že vektor v_λ je ortogonální na jádro zobrazení λ,

10.8. Předpokládejme, že vektory $u_1, u_2, u_3 \in U$ tvoří ortogonální systém. Jsou vektorové podprostory $\langle u_1, u_2 \rangle$ a $\langle u_2, u_3 \rangle$ kolmé? Jaké jsou jejich dimenze?

Kapitola 11

Eukleidovské prostory

V afinních prostorech, jak byly definovány a studovány v předchozích kapitolách, není možno měřit: rozměry, plochy, objemy, úhly. Jsou to pojmy, které se v teorii afinních prostorů nevyskytují. Nedostalo se na ně při výběru jevů reálného světa, které našly svou ideálizovanou verzi v abstraktní struktuře afinního prostoru. V této kapitole přidáme k afinnímu prostoru strukturu, která měření umožní. Je to struktura skalárního součinu, kterou jsme zatím bez souvislosti s afinními prostory studovali v minulé kapitole.

11.1 Základní vlastnosti eukleidovských prostorů

Eukleidovským prostorem rozumíme afinní prostor, na jehož zaměření je zadán skalární součin. V celé kapitole budeme pracovat s eukleidovským prostorem A se zaměřením U dimenze m. V této části se podíváme, jak se základní vlastnosti skalárního součinu přenáší na afinní prostory.

Afinní báze (α, a_0) eukleidovského prostoru A se nazývá *kartézská*, je-li α ortonormální báze zaměření U.

O afinních podprostorech $B_1, B_2 \subseteq A$ řekneme, že jsou *kolmé* (*ortogonální*), jsou-li jejich zaměření ortogonální. Obecnější pojem odchylky definujeme pro polopřímky. Je-li $K_1 \subseteq A$ polopřímka určená body a_0 a a_1 a $K_2 \subseteq A$ polopřímka určená body a_0 a a_2, pak jejich *odchylkou* nazýváme odchylku vektorů $a_1 - a_0$ a $a_2 - a_0$.

Vzdálenost bodů $a, b \in A$ definujeme jako číslo

$$d(a,b) = \|b - a\|.$$

Následující věta shrnuje základní vlastnosti vzdálenosti bodů v eukleidovském prostoru.

Věta 11.1. *Pro libovolné tři body $a_1, a_2, a_3 \in A$ platí*

$$d(a_1,a_2) \geq 0, \quad d(a_1,a_2) = 0 \text{ jedině když } a_1 = a_2, \tag{11.1}$$
$$d(a_1,a_2) = d(a_2,a_1), \tag{11.2}$$
$$d(a_1,a_3) \leq d(a_1,a_2) + d(a_2,a_3). \tag{11.3}$$

Důkaz. Všechny vlastnosti plynou snadno z vlastností normy vektoru a potažmo skalárního součinu.

Třetí vlastnost se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Celkově Věta 11.1 říká, že zobrazení d je tzv. metrika. V teorii metrických prostorů je *metrika na množině* A zobrazení $d\colon A \times A \to \mathbf{R}$, které splňuje podmínky (11.1), (11.2) a (11.3).

Pojem vzdálenosti nyní zobecníme na libovolné afinní podprostory eukleidovského prostoru A. *Vzdálenost* $d(B_1,B_2)$ *afinních podprostorů* $B_1, B_2 \subseteq A$ je definována takto:

$$d(B_1,B_2) = \min\left\{d(b_1,b_2) \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\right\}.$$

Je to tedy nejkratší ze vzdáleností dvou bodů, z nichž jeden leží v B_1 a druhý v B_2. V principu by takto definovaná vzdálenost nemusela existovat, protože uvedená množina by nemusela mít nejmenší prvek (jak víme, množiny reálných čísel nemají vždy nejmenší prvek, například interval $(0,1)$). Obecnější (a nikoli nesprávná) definice vzdálenosti afinních podprostorů by byla tato:

$$d(B_1,B_2) = \inf\left\{d(b_1,b_2) \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\right\}.$$

Jak ukazuje následující věta, k tak obecné definici se nemusíme uchylovat, protože vzdálenost afinních podprostorů se vždy realizuje v nějakých jejich bodech.

Věta 11.2. *Mějme dva afinní podprostory B_1, B_2 se zaměřeními V_1, V_2 eukleidovského prostoru A se zaměřením U. Dále předpokládejme, že pro body $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ je vektor $b_2 - b_1$ kolmý na každý z vektorových podprostorů V_1 a V_2. Potom*

$$d(B_1,B_2) = d(b_1,b_2).$$

Důkaz. Ukážeme, že pro libovolné body $b_1' \in B_1$ a $b_2' \in B_2$ platí $d(b_1',b_2') \geq d(b_1,b_2)$. Jelikož vektor $v_1 = b_1 - b_1'$ leží v zaměření V_1 a vektor $v_2 = b_2 - b_2'$ leží ve V_2, jsou oba kolmé na vektor $b_2 - b_1$, takže i jejich rozdíl $v_2 - v_1$ je na tento vektor kolmý. Proto podle Pythagorovy věty 10.3

$$\|b_2 - b_1 - (v_2 - v_1)\|^2 = \|b_2 - b_1\|^2 + \|v_2 - v_1\|^2.$$

Vektor na levé straně je $b_2 - b_1 - (v_2 - v_1) = b_2 - b_1 - b_2 + b_2' + b_1 - b_1' = b_2' - b_1'$, takže levá strana je rovna $d(b_1',b_2')^2$. Na pravé straně máme $d(b_1,b_2)^2 + \|v_2 - v_1\|^2$, takže opravdu $d(b_1',b_2') \geq d(b_1,b_2)$.

Věta 11.2 dává základní informaci o vzdálenosti afinních podprostorů. Ta je určena vzdáleností bodů, které mají k podprostorům určitý vztah. K určení vzdálenosti podprostorů je třeba tyto body najít. Způsob, jak to udělat, závisí na konkrétních vlastnostech podprostorů: jejich vzájemné poloze a dimenzi.

V případě, že jde o přímky v trojrozměrném prostoru, ovšem řešení známe. Například pokud jde o mimoběžky, můžeme jejich vzdálenost zjistit nalezením jejich příčky se směrovým vektorem kolmým na obě přímky.

Afinní projekce f eukleidovského prostoru A na podprostor $B \subseteq A$ se nazývá *ortogonální*, je-li pro každý bod $a \in A$ vektor $a - f(a)$ kolmý na zaměření podprostoru B.

11.2 Shodnost a podobnost

Zobrazení f afinních prostorů A a B se nazývá *shodné* (též *shodnost*), pokud pro každé dva body $a_1, a_2 \in A$ platí

$$d(f(a_1), f(a_2)) = d(a_1, a_2).$$

Věta 11.3. *Každá shodnost je afinní zobrazení.*

Příklad 11.1. Identita, posunutí, středová souměrnost jsou shodná zobrazení.

Příklad 11.2. Mějme afinní podprostor B eukleidovského prostoru A, $\dim B = \dim A - 1$. Pro každý bod $a \in A$ existuje právě jeden bod $f(a) \in A$ takový, že

1. jestliže $a \notin B$, pak $f(a) \neq a$,
2. jestliže $f(a) \neq a$, pak přímka určená body a a $f(a)$ je kolmá na nadrovinu B,
3. $d(a, B) = d(f(a), B)$.

Zobrazení f, které přiřazuje každému bodu a bod $f(a)$, je shodnost a nazývá se *zrcadlení podle nadroviny* B.

Příklad 11.3. Mějme afinní podprostor B eukleidovského prostoru A, $\dim B = \dim A - 2$. Pokud pro bijektivní afinní transformaci $f : A \to A$ platí

1. pro každý bod $a \in A$, $b \in B$ je $d(f(a), b) = d(a, b)$,
2. f zachovává orientaci A,

pak existuje číslo $\vartheta \in [0, \pi]$, takové, že pro libovolný bod $a \notin B$ je odchylka přímky obsahující bod a a kolmé na B a přímky obsahující bod $f(a)$ a kolmé na B rovna ϑ. Zobrazení f je shodné zobrazení a nazývá se *Otočení* (*rotace*) kolem B o úhel ϑ.

Obecně existují dvě různá otočení kolem B o úhel ϑ. Abychom je odlišili, museli bychom vzít v úvahu orientaci prostoru A.

V dvojrozměrném afinním prostoru A je matice podřízeného lineárního zobrazení rotace o úhel ϑ vzhledem ke kladně orientované kartézské bázi

$$M = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

Zobrazení f je *podobné* (*podobnost*), pokud existuje číslo c takové, že pro každé $a_1, a_2 \in A$ platí

$$d(f(a_1), f(a_2)) = c\,d(a_1, a_2).$$

Číslo c se nazývá *koeficient podobnosti* f.

Příklad 11.4. Každá shodnost je podobnost s koeficientem 1.

Příklad 11.5. Stejnolehlost s koeficientem c je podobnost s koeficientem $|c|$.

Věta 11.4. *Je-li $f : A \to B$ podobnost s koeficientem c, pak pro každé tři body $a_0, a_1, a_2 \in A$ platí*

$$(f(a_1) - f(a_0)) \cdot (f(a_2) - f(a_0)) = c^2 (a_1 - a_0) \cdot (a_2 - a_0).$$

Důkaz. Plyne přímo z (10.11).

Poslední dvě věty této kapitoly plynou z předchozí věty. Jejich důkazy necháme na čtenáři.

Věta 11.5. *Podřízené lineární zobrazení shodnosti je izometrie.*

Věta 11.6. *Podobnost zachovává úhly: je-li $f : A \to B$ podobnost a $K_1, K_2 \subseteq A$ polopřímky se společným počátečním bodem, pak odchylka polopřímek $f(K_1)$ a $f(K_2)$ je rovna odchylce polopřímek K_1 a K_2.*

11.3 Obecná rovnice pomocí skalárního součinu

V části 6.3 jsme zavedli obecnou rovnici podprostoru afinního prostoru. Ukázali jsme, že každý afinní podprostor $B \subseteq A$ dimenze n je roven množině řešení rovnice (6.6)

$$f(b) = 0,$$

kde $f : A \to \mathrm{R}^{m-n}$ je surjektivní afinní zobrazení. Nyní si ukážeme, jak lze rovnici přepsat pomocí skalárního součinu v případě, že $n = m - 1$ (tedy $m - n = 1$ a B je nadrovina v prostoru A).

Bodem b_0 eukleidovského prostoru A se zaměřením U a nenulovým vektorem $w \in U$ je jednoznačně určena nadrovina $B \subseteq A$, která jím prochází a jejíž zaměření V je tvořeno vektory kolmými k vektoru w (V je tedy ortogonálním doplňkem jednorozměrného vektorového podprostoru generovaného vektorem w).

Nadrovina B je tvořena takovými body $b \in A$, že vektory $b - b_0$ jsou kolmé na vektor w. Je tedy dána rovnicí

$$w \cdot (b - b_0) = 0. \tag{11.5}$$

Tato rovnice se nazývá *obecná rovnice nadroviny* B (verze se skalárním součinem).

Vyjádříme rovnici v souřadnicích. Zvolme libovolnou kartézskou bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$ prostoru A, $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$. Označme souřadnice vektoru w ve vektorové bázi α takto: $w_\alpha = (w^1, w^2, \ldots, w^m)$, zkrácené souřadnice bodů b a b_0 v bázi φ jako $b_\varphi = [b^1, b^2, \ldots, b^m]$ a $(b_0)_\varphi = [b_0^1, b_0^2, \ldots, b_0^m]$. Teď můžeme levou stranu obecné rovnice napsat v souřadnicích:

$$w \cdot (b - b_0) = w_\alpha \cdot (b - b_0)_\alpha = w_\alpha \cdot b_\varphi - w_\alpha \cdot (b_0)_\varphi.$$

Dostáváme tedy následující souřadnicovou verzi obecné rovnice nadroviny:

$$w_\alpha \cdot b_\varphi = w_\alpha \cdot (b_0)_\varphi. \tag{11.6}$$

Obecná rovnice nadroviny bývá zadána v souřadnicích takto:

$$w^1 b^1 + w^2 b^2 + \cdots + w^m b^m = c, \tag{11.7}$$

kde $w^1, w^2, \ldots, w^m$ jsou zadaná čísla (souřadnice zadaného normálového vektoru nadroviny), $b^1, b^2, \ldots, b^m$ proměnné (souřadnice obecného bodu nadroviny) a c číslo.

Tato rovnice je někdy užitečnější než rovnice parametrická. Kdybychom ji nicméně chtěli na parametrickou rovnici převést, můžeme postupovat takto:

1. Nalézt jedno řešení rovnice (tzv. *partikulární řešení*). Tím získáme souřadnice jednoho bodu $b_0 \in B$.

2. Nalézt obecné řešení homogenní rovnice

   $$w^1 v^1 + w^2 v^2 + \cdots + w^m v^m = 0,$$

   což je snadné, protože jde o jednu homogenní lineární rovnici o m neznámých $v^1, v^2, \ldots, v^m$. Koeficienty $w^1, w^2, \ldots, w^m$ nejsou všechny nulové, protože jsou to souřadnice nenulového normálového vektoru nadroviny. Rovnice má $m-1$ lineárně nezávislých řešení:

   $$\begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2^1 \\ \vdots \\ v_2^m \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_{m-1}^1 \\ \vdots \\ v_{m-1}^m \end{pmatrix},$$

   což jsou souřadnice vektorů $v_1, \ldots, v_{m-1}$, které tvoří bázi zaměření nadroviny B.

Parametrická rovnice nadroviny B pak bude

$$b = b_0 + t^1 v_1 + \cdots + t^m v_{m-1}. \tag{11.8}$$

Pokud chceme naopak parametrickou rovnici nadroviny (11.8) převést na obecnou rovnici, můžeme postupovat takto: položíme $w = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{m-1}$, čímž dostaneme normálový vektor w. Obecná rovnice má pak tvar (11.5) a v souřadnicích (11.6), případně (11.7), kde číslo c získáme dosazením bodu b_0 do levé strany.

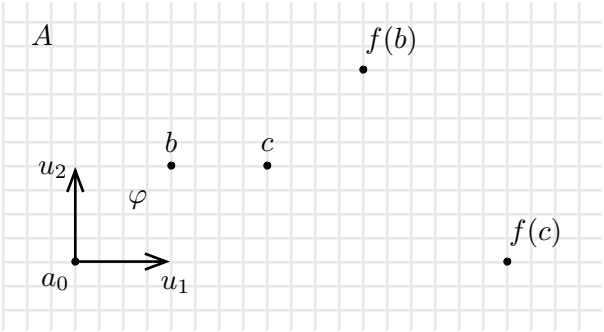
ÚLOHY KE KAPITOLE 11

11.1. Předpokládejme, že báze (u_1, u_2, u_3, a_0) v příkladu 7.5 je kartézská. Najděte vzdálenost přímek C a C'. Při hledání průsečíku roviny a přímky zkuste dva způsoby: pomocí parametrické a pomocí obecné rovnice roviny.

11.2. V situaci z předchozí úlohy uvažte ortogonální projekci na podprostor určený bodem a_0 a vektory u_1 a u_2. Je obraz přímky C' při této projekci kolmý na přímku C? Odhadněte a pak vypočtěte.

11.3. V situaci z úlohy 11.1 uvažte rovinu D, která obsahuje bod $a_0 + u_1 + u_2 + u_3$ a je rovnoběžná s přímkou C i s přímkou C'. Jaká je vzdálenost roviny D od těchto přímek?

11.4. Podle údajů z obrázku 11.1 najděte matici podobnosti f eukleidovské roviny A vzhledem ke kartézské bázi φ, když znáte obrazy bodů a a b a víte, že podobnost zachovává orientaci. Kolik je koeficient podobnosti f?



Obrázek 11.1: Obrázek k úloze 11.4

11.5. V afinní rovině je dána kartézská báze φ a bod a_0 se zkrácenými souřadnicemi $(a_0)_\varphi = [3, 1]$. Najděte matici rotace se středem a_0 o úhel $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ ve směru souhlasném s orientací danou bazí φ.

Kapitola 12

Projektivní prostory

Teorie afinních prostorů, jak jsme se jí zabývali dosud, není dostatečně obecná pro základní potřeby počítačové grafiky. Hlavním jejím nedostatkem, který brání obecnějšímu použití, je omezenost afinních zobrazení. Ta nedovedou zachytit naši základní zkušenost z pozorování světa: rovnoběžné přímky vidíme jako různoběžky, pozorovaná velikost objektu závisí na tom, jak je objekt od pozorovatele vzdálen.

Tato a následující kapitola se zabývají základy teorie projektivních prostorů, která tyto nedostatky nemá. V první části této kapitoly studujeme zobrazení afinních prostorů, která nezachovávají rovnoběžnost, ale realizují obecnější efekt perspektivy (zkosení). Zjistíme, že ke studiu těchto zobrazení je vhodné rozšířit afinní prostory o nevlastní body („body v nekonečnu“) a tím dojdeme k teorii projektivních prostorů.

Prvky afinních prostorů se často současně považují za vektory v nějakých prostorech vektorových. Proto není možné vždy odlišit, kdy souřadnice bodů označovat hranatými a kdy kulatými závorkami.

12.1 Perspektivní promítání v příkladech

Snažíme se nalézt matematický model pro zobrazení, která (na rozdíl od afinních zobrazení) nezachovávají rovnoběžnost, ale realizují efekt perspektivy, zkosení a podobně. To si, jak uvidíme, vynutí přechod k jinému typu prostorů, než jsou prostory afinní.

Příklad 12.1. Ukážeme příklad zobrazení dvou dvourozměrných afinních prostorů s efektem perspektivy. Na obrázku 12.1 vlevo je fotografie. Vpravo je pak jistá její transformace provedená v grafickém softwaru. Software použil určité zobrazení roviny vlevo do roviny vpravo, které nezachovává rovnoběžnost. Inverzní zobrazení, tedy zobrazení zprava doleva, je zobrazení, které provedl samotný fotoaparát při pořizování fotografie.

Na obrázku 12.2 je schematicky znázorněno zobrazení podobné tomu, které se váže k fotografii na předchozím obrázku. Mělo by jít o zobrazení $f : A \to B$ dvou afinních prostorů A a B, ovšem nikoliv o afinní zobrazení. Na obrázku vidíme afinní báze $\varphi = (u_1, u_2, a_0)$

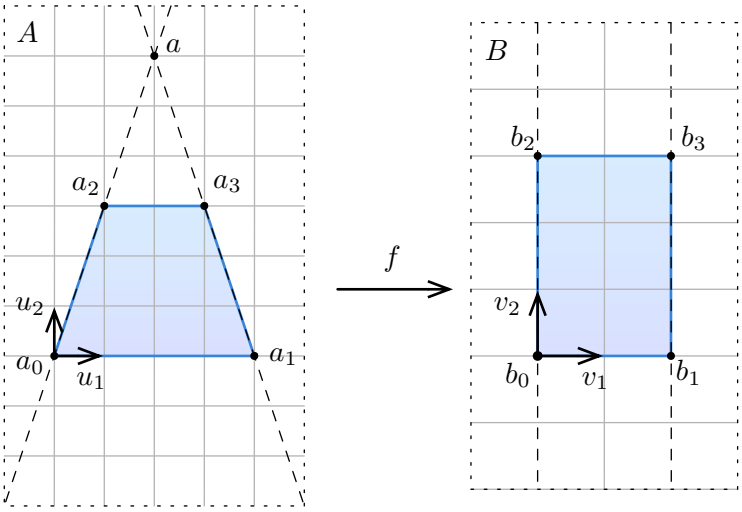
Obrázek 12.1: Transformace (části) dvourozměrného afinního prostoru, která není afinní (obrázek k příkladu 12.1).

prostoru A a $\psi = (v_1, v_2, b_0)$ prostoru B. Zobrazení by mělo zobrazovat vrcholy lichoběžníka vlevo na odpovídající vrcholy obdélníka vpravo. Mělo by tedy platit

$$f(a_0) = b_0, \qquad f(a_0 + 4u_1) = b_0 + 2v_1, \tag{12.1}$$

$$f(a_0 + u_1 + 3u_2) = b_0 + 3v_2, \qquad f(a_0 + 3u_1 + 3u_2) = b_0 + 2v_1 + 3v_2. \tag{12.2}$$

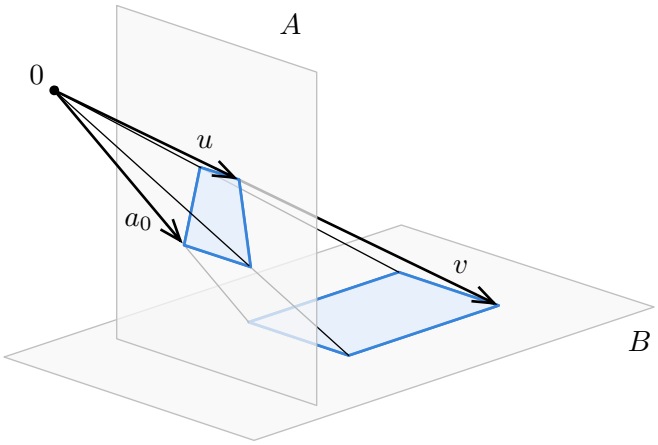
Dále by se měla libovolná přímka prvního prostoru zobrazit do přímky, neboli obrazy libovolných bodů ležících na přímce by měly opět ležet na přímce.



Obrázek 12.2: Druhý obrázek k příkladu 12.1.

Vytvoříme jednoduchý geometrický model, který nám umožní zobrazení z předchozího příkladu popsat. Kniha leží v afinní rovině A, na kterou se dívá pozorovatel z bodu ležícího mimo rovinu. Tento bod je pevně zvolen, můžeme tedy náš trojrozměrný prostor s pozorovatelem a rovinou A modelovat trojrozměrným vektorovým prostorem V, jehož nulový vektor je právě umístěním pozorovatele.

Obraz viděný pozorovatelem je projekcí okolí na promítací plátno, které modelujeme afinní rovinou B. Na ní vzniká deformovaný obraz obdélníka knihy (obr. 12.3).



Obrázek 12.3:

Pozorovatel není schopen rozlišit body ležící v zákrytu, tedy body modelované vektory, z nichž každý je nenulovým násobkem toho druhého. Na obrázku vidíme dva takové vektory označené u a v. Je zhruba vidět, že $v = 3u$. Všechny takové body pozorovateli splývají v jeden. Jsou to body, které leží na přímce procházející nulovým vektorem, tedy na jednorozměrném vektorovém podprostoru vektorového prostoru V.

Jelikož afinní prostor A je podprostorem vektorového prostoru V, jsou všechny jeho body současně vektory prostoru V.

Příklad 12.2. Na obrázku je znázorněn jeden takový vektor: vektor a_0, který je počátkem afinní báze φ prostoru A z příkladu 12.1. Vektory u_1 a u_2 této báze jsou také vektory prostoru V, takže φ je vektorová báze vektorového prostoru V. Vektor u z obr. 12.3 splývá s bodem a_3 z obr. 12.2 a vektor v s bodem b_3: platí $u = a_3$, $v = b_3$. Souřadnice vrcholů lichoběžníka vzhledem k bázi φ jsou

$$(a_0)_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_1)_\varphi = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_2)_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_3)_\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

s tím, že bázi φ chápeme jako vektorovou bázi a body a_0, a_1, a_2 a a_3 jako vektory. Třetí souřadnice, která je rovna jedné, je tedy opravdová souřadnice, nikoliv formalita. K tomu se ještě vrátím v další části.

Příklad 12.3. Tyto poznatky nám nyní pomohou nalézt zobrazení f. Hledáme rovinu $B \subseteq V$ tak, aby obraz lichoběžníka v rovině A na ni byl rovnoběžníkem. Body b_0, b_1, b_2 a b_3 tedy budou vhodnými násobky bodů a_0, a_1, a_2 a a_3: $b_0 = r^0 a_0$, $b_1 = r^1 a_1$, $b_2 = r^2 a_2$, $b_3 = r^3 a_3$ (můžeme mluvit o násobcích bodů, protože jsou to současně vektory) tak, aby $b_2 - b_0 = b_3 - b_1$. V souřadnicích to vede na soustavu rovnic

$$r^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - r^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r^3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - r^1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ta má nekonečně mnoho řešení, nám ovšem bude stačit jedno netriviální. Obrázku 12.3 odpovídá řešení $r^0 = r^1 = \frac{3}{2}$, $r^2 = r^3 = 3$.

Nalezli jsme (jedny možné) souřadnice bodů b_0, b_1, b_2 a b_3 v bázi φ:

$$(b_0)_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \qquad (b_1)_\varphi = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \qquad (b_2)_\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (b_3)_\varphi = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Můžete si sami zkontrolovat, že pro tyto body opravdu platí $b_2 - b_0 = b_3 - b_1$.

Teď už bude hračka najít s jejich pomocí souřadnice vektorů v_1, v_2. Obrázek 12.2 říká, že $v_1 = \frac{1}{2}(b_1 - b_0)$ a $v_2 = \frac{1}{3}(b_2 - b_0)$, takže

$$(v_1)_\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (v_2)_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Tím dostaneme matici přechodu od báze ψ k bázi φ:

$$M_{\varphi,\psi} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(poslední sloupec obsahuje souřadnice vektoru b_0 v bázi φ). Matice přechodu od báze φ k bázi ψ je k ní inverzní. Výpočtem dostaneme

$$M_{\psi,\varphi} = (M_{\varphi,\psi})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/9 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Nač je nám tato matice dobrá? Víme, že když ji vynásobíme souřadnicovým vyjádřením libovolného vektoru v bázi φ, dostaneme vyjádření téhož vektoru v bázi ψ. Odpovídající bod v rovině B pak dostaneme vynásobením vyjádření vhodným číslem (to už víme), a to vhodné číslo je takové, aby třetí souřadnice byla rovna jedné.

Podívejme se například na obrázek 12.3. Vektor u je totožný s bodem a_3. Jeho souřadnice v bázi φ jsou $(3,3,1)$. Vynásobením maticí $M_{\psi,\varphi}$ dostaneme souřadnice téhož vektoru v bázi ψ: $(2/3, 1, 1/3)$. Abychom dostali vyjádření vektoru v, musíme toto vyjádření vynásobit 3. jak jsme přišli na to, že zrovna třemi (kromě toho, že to napovídá obrázek)? Potřebujeme, aby poslední souřadnice byla rovna jedné, abychom dostali bod roviny B. Takže souřadnice vektoru v (a tedy afinní souřadnice bodu b_3) v bázi ψ jsou $(2,3,1)$, což odpovídá výsledku, který jsme chtěli dostat (viz obr. 12.2).

Teď se můžete sami přesvědčit, že pomocí získané matice dostaneme správně souřadnice obrazů i ostatních vrcholů lichoběžníka. Předtím si ale matici ještě vynásobte devíti, abyste nemuseli počítat se zlomky. Dostanete matici

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 12.4. V předchozím příkladě jsme nebrali v úvahu problém, ke kterému může při souřadnicové reprezentaci bodu libovolnou trojicí čísel dojít. Řekli jsme, že abychom z libovolné trojice čísel dostali afinní souřadnice reprezentovaného bodu, musíme ji podělit její třetí složkou. To bychom ale nemohli udělat, pokud by třetí složka trojice byla nulová. Může se to stát?

Pokud matici M vynásobíme například vektorem $(2,6,1)$, výsledek opravdu bude mít jako třetí složku nulu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.3}$$

Z obrázku 12.2 snadno nahlédneme, co se děje. Bod afinního prostoru A o těchto souřadnicích (v naší bázi φ) je na obrázku označen a. Je průsečíkem různoběžných přímek vzniklých prodloužením ramen lichoběžníka (zakreslených čárkovaně). Tyto přímky se do prostoru B zobrazí na rovnoběžky (zakreslené rovněž čárkovaně). Jejich průsečík se tedy nemůže nikam zobrazit, protože rovnoběžky nemají žádný společný bod.

Přesto je bod a užitečný, jak dobře víme z výtvarné výchovy či deskriptivní geometrie: pomáhá při zobrazování rovnoběžných přímek v perspektivním promítání.

Z našeho pohledu je také zajímavé, že ačkoli tento bod nemá v prostoru B obraz, vynásobením matice M souřadnicemi $(2,6,1)$ přesto dostaneme užitečný výsledek. Jak jsme zjistili výpočtem (12.3), součinem je trojice čísel $(0,18,0)$. To je ovšem souřadnicové vyjádření směrového vektoru čárkovaně zakreslených rovnoběžek v prostoru B, tedy těch

rovnoběžek, do kterých se zobrazí ramena lichoběžníku v prostoru A. Tedy: přestože zobrazení některých bodů nemá smysl jako bod, určuje směr v afinním prostoru B. V našem případě je to směr, kterým by ležel průsečík rovnoběžek, kdyby zcela rovnoběžné nebyly, ale přece jen se nepatrně sbíhaly (*směr* v afinním prostoru je určen nenulovým vektorem; dva nenulové vektory, které jsou lineárně závislé, určují týž směr).

V této části jsme si ukázali, jak lze efekt perspektivy vyjádřit vzhledem k afinním bazím pomocí matice. Narazili jsme přitom na jednu komplikaci a jednu zajímavost:

Komplikace. Jako souřadnice bodu v m-rozměrném afinním prostoru vzhledem k afinní bázi je vhodné chápat všechny $(m+1)$-tice čísel s poslední složkou nenulovou. Nejen ty, které končí jedničkou.

Zajímavost. Body se mohou zobrazovat na směry a směry na body. Směry jsou v afinních souřadnicích dány $(m+1)$-ticemi s poslední složkou nulovou.

Oba uvedené jevy spolu souvisejí a ukazují, že k pochopení perspektivních efektů je vhodné vnořit afinní rovinu do trojrozměrného vektorového prostoru (a obecně m-rozměrný afinní prostor do $(m+1)$-rozměrného vektorového prostoru. Vlastnostmi tohoto vnoření se budeme zabývat dále.

12.2 Afinní nadrovina ve vektorovém prostoru

Nejprve prozkoumáme vlastnosti afinních nadrovin ve vektorových prostorech. Pomůže nám to pochopit některé dosud nevysvětlené jevy v afinních prostorech: proč souřadnice bodů v m-rozměrném afinním prostoru, ať afinní, nebo bodové, mají $m+1$ složek, proč je poslední z afinních souřadnic vždy rovna jedné, proč je součet bodových souřadnic vždy roven jedné. Téma této části nesouvisí přímo s projektivními prostory, ale pomůže nám se na ně připravit.

Příklad 12.5. Uvažme nadrovinu A ve vektorovém prostoru prostoru R^3 danou předpisem

$$A = \left\{ (a^1, a^2, a^3) \in \mathrm{R}^3 \mid a^3 = 1 \right\}. \tag{12.4}$$

Zaměřením této nadroviny je vektorový podprostor

$$U = \left\{ (u^1, u^2, u^3) \in \mathrm{R}^3 \mid u^3 = 0 \right\}. \tag{12.5}$$

Prvky nadroviny A hrají dvojí roli. Jsou to body v afinním prostoru A a současně vektory ve vektorovém prostoru R^3. Prvky vektorového podprostoru U, který je zaměřením afinního prostoru A, jsou tedy vektory téhož vektorového prostoru jako prvky afinního prostoru A. Podívejme se podrobněji, co lze z těchto souvislostí vytěžit.

Nejprve si uvědomme, jak lze v této situaci interpretovat sčítání bodu a vektoru. Víme, že prostor R^3 je afinní prostor, v němž je sčítání bodu a vektoru totožné se sčítáním vektorů ve vektorovém prostoru. Protože afinní prostor A je afinním podprostorem afinního prostoru R^3 a jeho zaměřením je vektorový podprostor $U \subset \mathrm{R}^3$, přenese se tato vlastnost i na tento podprostor: pro libovolný bod $a \in A$ a vektor $u \in U$ je součet bodu a vektoru $a+u$ roven součtu $a+u$ vektorů v R^3.

Ze vztahů (12.4) a (12.5) vyplývá, jak vypadají složky vektorů a a u. Zatímco třetí složka vektoru a je rovna jedné, vektor u má třetí složku nulovou:

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud je také vidět, že součet $a+u$ bude prvkem podprostoru A, protože bude mít stejně jako bod a třetí složku rovnu jedné:

$$a+u = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1+u^1 \\ a^2+u^2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12.6}$$

Příklad 12.6. Uvažme obecnější případ. Místo R^3 uvažujme libovolný vektorový prostor V dimenze 3. Dále zvolme libovolnou rovinu $A \subseteq V$, která neobsahuje nulový vektor, a dvojrozměrný vektorový podprostor $U \subseteq V$ rovnoběžný s A. (Podmínka $0 \notin A$ zaručuje, že podprostory A a U nesplývají.) Stejně jako v předchozím případě platí, že body roviny A jsou vektory z V, podprostor U je zaměřením roviny A a součet $a+u$ bodu $a \in A$ a vektoru $u \in U$ je totožný s jejich součtem definovaným ve vektorovém prostoru V.

Uvažme vektorovou bázi $\varphi = (u_1, u_2, a_0)$ prostoru V takovou, že $u_1, u_2 \in U$ a $a_0 \in A$. Vektory u_1 a u_2 tvoří bázi vektorového prostoru U, takže φ je současně afinní báze roviny A. Jelikož U je zaměřením A, má podprostor A parametrickou rovnici

$$a = a_0 + t^1 u_1 + t^2 u_2.$$

Jinými slovy, $a \in A$ právě když existují čísla t^1 a t^2 splňující tuto rovnici. Bod a lze ovšem jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2 a a_0 (jde totiž o bázi prostoru V):

$$a = a^1 u_1 + a^2 u_2 + a^0 a_0.$$

Srovnáním obdržených dvou vztahů získáme $a^0 = 1$, neboli bod a leží v rovině A, právě když jeho třetí souřadnice v bázi φ je rovna jedné. Trojice $(a^1, a^2, 1)$ je pak souřadnicovým vyjádřením bodu a v afinní bázi φ. Tím dostává dříve uvedená formální konvence přidávání jedničky k souřadnicím prvku afinního prostoru v afinní bázi zajímavý význam.

Příklad 12.7. Podívejme se na afinní kombinace v afinním prostoru A. Zvolme $k+1$ bodů $b_0, b_1, \ldots, b_k \in A$. Tyto body jsou současně vektory ve V, takže můžeme udělat jejich lineární kombinaci s libovolnými koeficienty $c^0, c^1, \ldots, c^k \in \mathbf{R}$. Dostaneme vektor $b = c^0 b_0 + c^1 b_1 + \cdots + c^k b_k \in V$, který jistě nemusí ležet v podprostoru A. Aby tam ležel, musí být jeho třetí souřadnice v bázi φ z předchozího příkladu rovna 1.

Označme

$$(b_0)_\varphi = \begin{pmatrix} b_0^1 \\ b_0^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (b_1)_\varphi = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad (b_n)_\varphi = \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$b_\varphi = c^0 \begin{pmatrix} b_0^1 \\ b_0^2 \\ 1 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + c^n \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 b_0^1 + c^1 b_1^1 + \cdots + c^k b_k^1 \\ c^0 b_0^2 + c^1 b_1^2 + \cdots + c^k b_k^2 \\ c^0 + c^1 + \cdots + c^k \end{pmatrix}.$$

Aby $b \in A$, musí tedy být $c^0 + c^1 + \cdots + c^k = 1$. Lineární kombinace $c^0 b_0 + c^1 b_1 + \cdots + c^k b_k$ musí tedy být afinní kombinací.

Příklad 12.8. Pokračujme v našich úvahách o nadrovině $A \subseteq V$ a uvažme tři body $b_0, b_1, b_2 \in A$. Jak jsme již zjistili, afinní kombinace v A lze počítat jako lineární kombinace ve V s týmiž koeficienty. Proto je snadné dokázat, že body b_0, b_1, b_2 jsou v obecné poloze právě když jsou lineárně nezávislé jakožto vektory ve V. Pokud by totiž pro čísla c^1 a c^2 platilo $b_0 = c^1 b_1 + c^2 b_2$, musí být $c^1 + c^2 = 1$ a lineární kombinace $c^1 b_1 + c^2 b_2$ vektorů $b_1, b_2 \in V$ je také afinní kombinací bodů $b_1, b_2 \in A$.

Příklad 12.9. Body afinního prostoru A z předchozích příkladů lze ztotožnit s jednorozměrnými vektorovými podprostory vektorového prostoru V (tj. s přímkami procházejícími počátkem), které s ním mají neprázdný průnik. Každý takový vektorový podprostor se totiž s rovinou A protne právě v jednom bodě a každý bod z A určuje právě jeden jednorozměrný vektorový podprostor ve V. Jednorozměrné vektorové podprostory V, které se s A neprotínají, můžeme chápat jako *směry* v afinním protoru A.

12.3 Projektivní prostory a podprostory

Na konci části 12.2 jsme si uvědomili, že body afinní nadroviny A vektorového prostoru V, která není jeho vektorovým podprostorem, lze ztotožnit s jednorozměrnými podprostory vektorového prostoru V. V části 12.1 jsme si ukázali, že zbylé jednorozměrné podprostory, které reprezentují směry v afinním prostoru A, je vhodné chápat jako zvláštní typ bodů. Je tedy vhodné se zabývat množinou všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V, bez ohledu na to, zda jsou rovnoběžné s nadrovinou A, nebo ne.

Mějme vektorový prostor V dimenze $m+1$, kde $m \geq -1$ a označme $\mathrm{P}(V)$ množinu všech jednorozměrných vektorových podprostorů prostoru V. *Projektivním prostorem nad vektorovým prostorem* V nazýváme libovolnou množinu P společně s bijekcí $P \to \mathrm{P}(V)$. Číslo m nazýváme *dimenzí* projektivního prostoru $\mathrm{P}(V)$ a označujeme $\dim \mathrm{P}(V)$. Je-li $m = 0$, nazýváme projektivní prostor $\mathrm{P}(V)$ *projektivním bodem*, pro $m = 1$ hovoříme o *projektivní přímce*, pro $m = 2$ o *projektivní rovině*.

Prvky projektivního prostoru P nazýváme *geometrickými body*. Je-li $a \in P$ geometrický bod, pak libovolný nenulový vektor $v \in V$, který generuje vektorový podprostor odpovídající v dané bijekci bodu a, nazýváme *aritmetickým zástupcem* tohoto bodu. Pro aritmetického zástupce v geometrického bodu a tedy vektorový podprostor $\langle v \rangle \subseteq V$ (což je lineární obal vektoru v, tedy množina všech jeho násobků) odpovídá bodu a v zadané bijekci $P \to \mathrm{P}(V)$.

Je-li W vektorový podprostor vektorového prostoru V, je $\mathrm{P}(W) \subseteq \mathrm{P}(V)$. Tomu odpovídá množina $Q \subseteq P$, která je společně se vzniklou bijekcí $Q \to \mathrm{P}(W)$ projektivním prostorem nad vektorovým prostorem W. Nazýváme ji *projektivním podprostorem projektivního prostoru* P. Je-li $\dim Q = \dim P - 1$, nazýváme projektivní podprostor Q *nadrovinou* v projektivním prostoru P.

Příklad 12.10. Mějme dva různé geometrické body $a_1, a_2 \in P$ a jejich aritmetické zástupce (po řadě) $v_1, v_2 \in V$. Jelikož $a_1 \neq a_2$, jsou vektory v_1 a v_2 lineárně nezávislé. Vektorový podprostor $W = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq V$, který generují, je tedy dvojrozměrný. Tento podprostor tedy určuje projektivní přímku $Q \subseteq P$. Jelikož $\langle v_1 \rangle \subseteq W$ a $\langle v_2 \rangle \subseteq W$, leží oba body a_1 a a_2 na této přímce. Každé dva různé body projektivního prostoru tedy jednoznačně určují přímku. Pro aritmetického zástupce v libovolného bodu $b \in Q$ existují čísla t_1 a t_2, ne současně nulová, tak, že

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2. \tag{12.7}$$

Přímku Q lze tedy vyjádřit rovnicí

$$b = \langle t_1 v_1 + t_2 v_2 \rangle \quad (t_1 \neq 0 \text{ nebo } t_2 \neq 0) \tag{12.8}$$

(s výhradou, že ztotožňujeme bod b a podprostor $\langle v \rangle$).

Příklad 12.11. Mějme dvě projektivní přímky $Q, Q' \subseteq P$ nad vektorovými prostory (po řadě) $W, W' \subseteq V$. Podobně jako v předchozím příkladě zvolme lineárně nezávislé vektory $v_1, v_2 \in W$ a lineárně nezávislé vektory $v'_1, v'_2 \in W'$. Pro libovolný společný bod $a \in Q \cap Q'$ těchto přímek musí existovat čísla t_1, t_2, t'_1, t'_2, kde t_1 nebo t_2 a t'_1 nebo t'_2 je nenulové, tak, že

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 = t'_1 v'_1 + t'_2 v'_2. \tag{12.9}$$

Příklad 12.12. Předpokládejme, že projektivní prostor P z předchozího příkladu je projektivní rovina a projektivní přímky $Q, Q' \subseteq P$ jsou různé. Platí $\dim W = \dim W' = 2$. Jelikož $\dim V = 3$, mají roviny W a W' neprázdný průnik. Současně ovšem $W' \neq W'$ (jelikož přímky Q a Q' jsou různé), takže musí být $\dim(W \cap W') = 1$. Vektorový podprostor $W \cap W'$ tedy

určuje bod $a \in P$, který leží na obou přímkách. Každé dvě různé přímky projektivní roviny tedy mají právě jeden společný bod. V tom se projektivní rovina liší od roviny afinní.

Bázi $\varphi = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ vektorového prostoru V nazýváme *aritmetickou bází projektivního prostoru* P. Souřadnice nenulového vektoru $v \in V$ v této bázi značíme jako obvykle v_φ. Pro libovolný bod $a \in P$ existuje nekonečně mnoho jeho aritmetických zástupců $v \in V$. Souřadnice těchto zástupců v bázi φ se liší; všechny ale jako vektory v R^{m+1} určují týž jednorozměrný vektorový podprostor v R^{m+1}. Tento podprostor značíme a_φ. Jestliže v je aritmetickým zástupcem bodu a, je $a_\varphi = \langle v_\varphi \rangle$. Vzniká zobrazení projektivního prostoru P do projektivního prostoru $\mathrm{P}(\mathrm{R}^{m+1})$, které bodu $a \in P$ přiřazuje bod $a_\varphi \in \mathrm{P}(\mathrm{R}^{m+1})$. Toto zobrazení nazýváme *homogenní souřadnicový systém* a značíme (pokud je třeba) φ.

Příklad 12.13. Je-li například P projektivní rovina, $v_\varphi = (2, -4, 6)$ a v je aritmetickým zástupcem bodu a, platí $a_\varphi = \langle (2, -4, 6) \rangle$. V tomto zápisu většinou vnitřní kulaté závorky vynecháváme a píšeme stručně (i když ne zcela správně) $a_\varphi = \langle 2, -4, 6 \rangle$. Současně ovšem také platí např. $a_\varphi = \langle -1, 2, -3 \rangle$ nebo $a_\varphi = \langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1 \rangle$. Nebo $a_\varphi = \langle -1000, 2000, -3000 \rangle$.

Je-li $v \in V$ aritmetický zástupce bodu $a \in P$, nazýváme $(m+1)$-tici v_φ *homogenními souřadnicemi bodu* a *vzhledem k aritmetické bázi* φ.

Příklad 12.14. V předchozím příkladě tedy každá z trojic $(2, -4, 6)$, $(-1, 2, -3)$, $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$ a $(-1000, 2000, -3000)$ představuje homogenní souřadnice bodu a v bázi φ. I v tomto případě ale většinou používáme špičaté závorky.

Je vidět, že zatímco pro danou geometrickou bázi φ je hodnota $a_\varphi \in \mathrm{P}(\mathrm{R}^{m+1})$ určena jednoznačně, pro samotné homogenní souřadnice bodu a to neplatí. Ty závisí na volbě jeho aritmetického zástupce. Všechny se ale liší pouze nějakým nenulovým násobkem.

12.4 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Mějme afinní prostor A dimenze m se zaměřením U. *Směrem* v afinním prostoru A nazýváme libovolný jednorozměrný vektorový podprostor v U. (Směry jsme neformálně definovali už v příkladu 12.4.) Množina všech směrů v A je rovna projektivnímu prostoru $\mathrm{P}(U)$. Množina $\bar{A}$ z příkladu 12.4 je tedy rovna sjednocení $A \cup \mathrm{P}(U)$.

Zavedeme na množině $\bar{A}$ strukturu projektivního prostoru: zvolíme libovolný vektorový prostor V dimenze $m+1$ (V se dá dokonce přímo z afinního prostoru A zkonstruovat, tím se ale nebudeme zabývat) a ztotožníme afinní prostor A s nějakou nadrovinou ve V neobsahující nulový vektor. Vektorový prostor U ztotožníme se zaměřením této nadroviny. (Technicky se to provede pomocí injektivního afinního zobrazení $A \to V$ a injektivního lineárního zobrazení $U \to V$, my budeme rovnou předpokládat, že $A \subseteq V$ a $U \subseteq V$.) Jde o situaci, kterou jsme na příkladech zkoumali v části 12.2.

Prvkům afinního prostoru A nyní odpovídají některé jednorozměrné podprostory vektorového prostoru V, zbylé pak odpovídají prvkům množiny $\mathrm{P}(U)$. Tím jsme zavedli bijekci $\bar{A} \to \mathrm{P}(V)$ a tedy zavedli na množině $\bar{A}$ strukturu projektivního prostoru.

Označme na chvíli tuto bijekci f (v budoucnu nebudeme značení potřebovat). Jde o zobrazení $f\colon \bar{A} \to \mathrm{P}(V)$, které je dáno následujícím předpisem (připomeňme, že $\bar{A} = A \cup \mathrm{P}(U)$):

$$f(a) = \begin{cases} \langle a \rangle & \text{pro } a \in A, \\ a & \text{pro } a \in \mathrm{P}(U). \end{cases}$$

Projektivnímu prostoru $\bar{A}$ se říká *projektivní rozšíření afinního prostoru* A. Prvky množiny $\bar{A}$, které neleží v A (tedy prvky množiny $\mathrm{P}(U)$) se nazývají *nevlastní body*. Množina $\mathrm{P}(U)$ je nadrovina v projektivním prostoru $\bar{A}$ a nazývá se *nevlastní nadrovina*.

Příklad 12.15. Je-li $\dim A = 1$ (A je tedy afinní přímka), existuje v A právě jeden směr. Množina $\mathrm{P}(U)$ je tedy jednoprvková a projektivní prostor $\bar{A}$ má právě jeden nevlastní bod.

Zvolme afinní bázi $\varphi = (u_1, \ldots, u_m, a_0)$ afinního prostoru A. Všechny její prvky (tedy jak vektory $u_1, \ldots, u_m$, tak bod a_0) jsou vektory vektorového prostoru V a tvoří jeho bázi. To jsme pro speciální případ $m = 2$ zjistili už v příkladu 12.6 a neměl by být problém to zobecnit i na libovolné m. Afinní báze protoru A jsou tedy geometrickými bazemi v projektivním rozšíření $\bar{A}$ a, jak víme ze zmíněného příkladu, afinní souřadnice bodů v A vzhledem k afinní bázi φ jsou současně jejich projektivními souřadnicemi vzhledem ke geometrické bázi φ. Podobné úvahy můžeme udělat pomocí příkladu 12.8 i pro bodové báze v A.

Příklad 12.16. Zkusme najít projektivní přímku v $\bar{A}$ určenou dvěma body, z nichž jeden je nevlastní. Předpokládejme, že $\dim A = 2$ a že projektivní souřadnice bodů $a, b \in \bar{A}$ v nějaké afinní bázi φ prostoru A (která je, jak víme, současně aritmetickou bazí projektivního prostoru $\bar{A}$) jsou $a_\varphi = \langle 0,1,1 \rangle$ a $b_\varphi = \langle 1,2,0 \rangle$. Vektorový podprostor $\langle a \rangle \subseteq V$ protíná nadrovinu A v bodě a, podprostor $\langle b \rangle$ ji ale neprotíná, jelikož bod b je nevlastní. Rovnice vektorového podprostoru $\langle a, b \rangle$ ve vektorové bázi φ je

$$v_\varphi = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.10}$$

Tato rovnice tedy určuje homogenní souřadnice všech prvků hledané projektivní přímky. Spočtěme ještě množinu vlastních bodů této přímky v rovině A. Tyto body mají třetí složku rovnu jedné, z rovnice (12.10) dostaneme podmínku

$$1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 = 1, \tag{12.11}$$

což znamená $t_1 = 1$ a rovnice hledané množiny vlastních bodů je

$$c_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.12}$$

Tato množina je tedy afinní přímkou procházející bodem a a se směrovým vektorem určeným bodem b.

Uvedený postup můžeme v počítačové grafice využít například v případě, že chceme zjistit dráhu paprsku světla, jehož zdroj je umístěn v nekonečnu.

Příklad 12.17. Navažme na předchozí příklad a položme $a_\varphi = \langle 0,1,1\rangle$, $b_\varphi = \langle 1,2,0\rangle$ a $c_\varphi = \langle 1,2,1\rangle$. Uvažme dvojici přímek určených body a,b a c,b. Z předchozího víme, že tyto dvě projektivní přímky určují afinní přímky v prostoru A o rovnicích

$$d_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d_\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.13}$$

Vidíme, že se jedná o rovnoběžky, které v prostoru A nemají průsečík. Abychom zjistili průnik projektivních přímek, napišme si a porovnejme jejich rovnice:

$$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.14}$$

Vyřešením vzniklé soustavy získáme

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_3 &= 0, \\ t_2 &= t_4, \end{aligned} \tag{12.15}$$

což znamená, že uvedené projektivní přímky se protínají v nevlastním bodě b.

Kapitola 13

Projektivní zobrazení

Příklad 13.1. Dvojrozměrný obrázek trojrozměrného prostoru na fotografii na obrázku 13.1 nelze modelovat afinním zobrazením, protože zobrazuje rovnoběžné přímky jako různoběžky. Jako model tedy potřebujeme zobrazení, které nezachovává rovnoběžnost.

Příklad 13.2. Podívejme se, jaké zobrazení by mohlo stát za fotografií z předchozího příkladu. Představme si pozorovatele umístěného v dvojrozměrném afinním prostoru A do bodu a_0. Tento bod je počátkem afinní báze $\varphi = (u_1, u_2, a_0)$. Pozorovatel hledí ve směru vektoru u_2. Veškeré předměty, které vidí, se mu promítají na přímku (v přirozenějším trojrozměrném příkladě by to byla rovina) B. Nazveme ji *projekční plátno* (*průmětna*) a stanovíme, že bude mít parametrickou rovnici $b = (a_0 + u_2) + tu_1$. Jde tedy o přímku, jejíž body jsou právě body $b \in A$, jejichž druhá souřadnice v bázi φ je rovna jedné: $b^2 = 1$. Každý viditelný bod z prostoru A se na projekčním plátně zobrazí do bodu, který vznikne jako jeho průsečík se spojnicí bodu a umístění pozorovatele.

Popsaným způsobem vzniká zobrazení f nějaké podmnožiny prostoru A na projekční plátno B. O jakou podmnožinu jde, je celkem jasné: je to množina všech bodů, které spolu s bodem a_0 určují přímku, která není rovnoběžná s promítacím plátnem. Je to tedy množina všech bodů, které neleží na přímce $a_0 + \langle u_1 \rangle$. Jinak řečeno, jsou to body, jejichž druhá souřadnice v bázi φ není nulová.

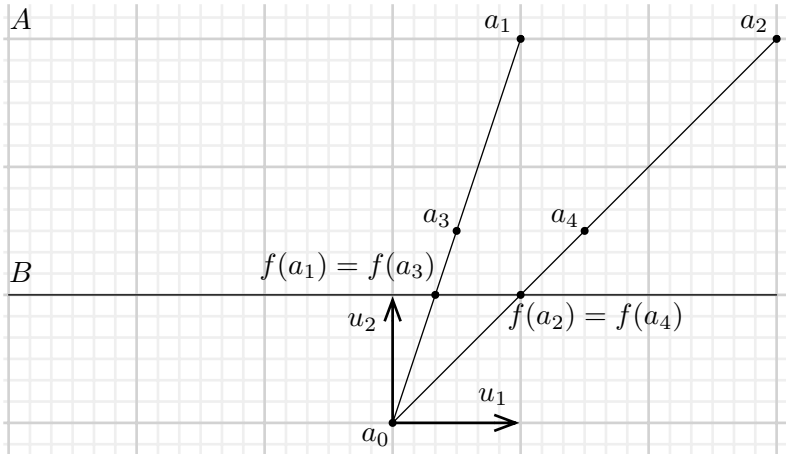
Na obr. 13.2 vidíme obrazy bodů $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ se souřadnicemi

$$(a_1)_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_2)_\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_3)_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (a_4)_\varphi = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Platí $f(a_1) = f(a_3)$ a $f(a_2) = f(a_4)$ a v souřadnicích

$$f(a_1)_\varphi = f(a_3)_\varphi = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(a_2)_\varphi = f(a_4)_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obrázek 13.1: Obrázek na fotografii nelze modelovat afinním zobrazením, protože nezachovává rovnoběžnost.



Obrázek 13.2: Promítání bodů na přímku s efektem perspektivy

Není těžké odvodit rovnici tohoto zobrazení. Jestliže bod a má v bázi φ (zkrácené) souřadnice a^1 a a^2, bod $f(a)$ má souřadnice a^1/a^2 a 1. Zobrazení f ovšem není afinní; jistě neexistuje matice

$$M = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

taková, že

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1/a^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.2}$$

Zajímavé ovšem je, že pokud zvolíme matici M takto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.3}$$

dostaneme

$$M \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}, \tag{13.4}$$

což sice není výsledek, který jsme chtěli získat, ale po vydělení všech tří složek číslem a^2 (které je, jak víme, nenulové) už požadovanou trojici $(a^1/a^2, 1, 1)$ obdržíme.

Zobrazení f tedy lze reprezentovat maticí, i když nejde o afinní zobrazení. Je třeba pouze připustit, že body prostoru a můžeme vzhledem k bázi φ vyjadřovat různými trojicemi čísel, které nemusí mít jako poslední složku číslo 1: například trojice $(-1, 2, -1)$ a $(2, -4, 2)$ vyjadřují tentýž bod, totiž bod, jehož afinní souřadnice jsou $(1, -2, 1)$.

Příklad 13.3. Vraťme se k příkladu 13.1. Na obr. 13.3 jsou do fotografie zakresleny zeleně dvě přímky, které odpovídají čtyřem rovnoběžným přímkám v trojrozměrném afinním prostoru. Směr, který tyto rovnoběžky určují, odpovídá na fotografii průsečíku zelených přímek.

13.1 Projektivní zobrazení

Když jsme definovali a prozkoumali projektivní prostor, můžeme se konečně vrátit k důvodu, proč jsme se do toho pouštěli: k zobrazením realizujícím efekty perspektivy.

Mějme tedy dva projektivní prostory P a Q nad vektorovými prostory (po řadě) V a W. Je-li $F: V \to W$ lineární zobrazení, pak pro každé dva lineárně závislé vektory v_1, $v_2 \in V$ jsou i vektory $F(v_1), F(v_2) \in W$ lineárně závislé. Pokud jsou navíc vektory $F(v_1)$ a

Obrázek 13.3: Obrázek k příkladu 13.3

$F(v_2)$ nenulové, jsou všechny čtyři vektorové podprostory $\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle \subseteq V$, $\langle F(v_1)\rangle, \langle F(v_2)\rangle \subseteq W$ jednorozměrné a platí $\langle v_1\rangle = \langle v_2\rangle$ a $\langle F(v_1)\rangle = \langle F(v_2)\rangle$. Pokud je tedy pro $v \in V$ vektor $F(v)$ nenulový, hodnota $\langle F(v)\rangle$ závisí pouze na vektorovém podprostoru $\langle v\rangle$, nikoliv na volbě jeho konkrétního prvku (v našem případě vektoru v).

Jinak řečeno, pro libovolné dva aritmetické zástupce v_1, v_2 téhož bodu z projektivního prostoru P existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ tak, že $v_2 = cv_1$. Proto $F(v_2) = F(cv_1) = cF(v_1)$ a vektory $F(v_1)$ a $F(v_2)$ jsou aritmetickými zástupci téhož bodu z Q.

Můžeme tedy vyslovit následující definici: Mějme nenulové lineární zobrazení $F\colon V \to W$ a množinu $U \subseteq P$ všech bodů $a \in P$ takových, že pro jejich aritmetické zástupce v platí $F(v) \neq 0$. Zobrazení $f : U \to Q$ takové, že je-li v aritmetickým zástupcem bodu $a \in U$, pak $F(v)$ je aritmetickým zástupcem bodu $f(a)$, nazýváme *projektivním zobrazením nad lineárním zobrazením* F.

Stručná poznámka o maticích: Jako matici projektivního zobrazení můžeme vzít matici příslušného lineárního zobrazení vzhledem k aritmetickým bazím. Jedno projektivní zobrazení ovšem má více matic (všechny nenulové násobky).

Příklad 13.4. Projektivní zobrazení se v počítačové grafice používají k vytvoření perspektivních efektů. Uvažme afinní rovinu A a její projektivní rozšíření nad vektorovým prostorem V. Nechť lineární zobrazení $F : V \to V$ má v nějaké afinní bázi φ prostoru A matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.5}$$

Jestliže pro $a \in A$ platí $a_\varphi = \langle x, y, 1 \rangle$, kde $x \neq 0$, pak

$$f(a)_\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{y}{x} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{13.6}$$

Zkuste si nyní představit, jak zobrazení f transformuje body i složitější útvary v rovině A — například čtverec s vrcholy o zkrácených souřadnicích $[1,0]$, $[1,1]$, $[2,1]$, $[2,0]$, nebo $[2,1]$, $[2,0]$, $[3,1]$, $[3,0]$. Uvědomte si také, kam toto zobrazení zobrazuje nevlastní body a naopak, které body zobrazuje na body nevlastní.

Příklad 13.5. Projektivní zobrazení používaná v praxi nemívají tak jednoduché matice, jak jsme zatím uváděli zde. Pokud například matici (13.3) upravíme tak, aby vzdálenost projekčního plátna od pozorovatele nebyla rovna jedné, ale nějakému číslu d, dostaneme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.7}$$

Grafický software ovšem obvykle nepoužívá přímo matici M, ale její rozklad na součin dvou matic, $M = M_2 \cdot M_1$, z nichž každá realizuje jednodušší projektivní transformaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \tag{13.8}$$

Matice M_1 realizuje perspektivní zkosení v prostoru A, podobně jako matice z předchozího příkladu. Projektivní zobrazení, které definuje, zobrazuje lichoběžníky určené úhlem pohledu a dvěma přímkami rovnoběžnými s osou x na obdélník (vyzkoušejte si to například na lichoběžníku s vrcholy $[1,d]$, $[2,2d]$, $[-2,-2d]$, $[-1,-d]$). Po zobrazení bodů zobrazované

scény maticí M_1 se jednoduše provádí tzv. *clipping*, neboli omezení scény na body, které leží v zorném úhlu a nejsou k pozorovateli příliš blízko, ani od něj příliš daleko.

Matice M_2 provádí již jen jednoduché kolmé promítnutí prostoru A na projekční plátno (v praxi by to bylo kolmé promítnutí trojrozměrného prostoru na rovinu obrazovky). Jak je vidět z tvaru matice, zobrazení, které realizuje, je afinní.

Kapitola 14

Křivky v eukleidovských prostorech

V poslední části textu se budeme krátce zabývat křivkami. Seznámíme se s pojmy křivky, spojitosti křivky, tečny, normály a binormály. Půjde o zběžné nahlédnutí do rozsáhlé oblasti diferenciální geometrie, která kromě poznatků analytické geometrie, s nimiž jsme se seznámili v tomto textu, využívá i výsledků matematické analýzy a topologie. Kromě křivek, které lze považovat za jednorozměrné útvary, se zabývá dvojrozměrnými plochami i vícerozměrnými útvary. Má aplikace v mnoha oblastech vědy, počínaje fyzikou a konče inženýrstvím.

14.1 Limita a spojitost bodové funkce

Pojmy limity a spojitosti známe z matematické analýzy funkcí jedné či více proměnných. V této podkapitole připomeneme jejich speciální případ pro zobrazení intervalu reálných čísel do eukleidovského prostoru.

Mějme eukleidovský prostor A. *Otevřenou koulí se středem* $a_0 \in A$ *a poloměrem* $r > 0$ nazýváme množinu

$$\mathrm{B}^r(a_0) = \{a \in A \mid d(a, a_0) < r\}.$$

Zobrazení $\gamma\colon J \to A$, kde $J \subseteq \mathrm{R}$, nazýváme *bodovou funkcí*. Zobrazení $J \to U$, kde U je vektorový prostor, nazýváme *vektorovou funkcí*.

Mějme uzavřený interval $J \subseteq \mathrm{R}$ nenulové délky, bod $t_0 \in J$ a bodovou funkci γ definovanou na J s případnou výjimkou bodu t_0 (je tedy $\gamma\colon J \to A$ nebo $\gamma\colon J \setminus \{t_0\} \to A$). V budoucnu budeme stále předpokládat, že interval J je uzavřený a má nenulovou délku. Bod $a_0 \in A$ nazýváme *limitou funkce* γ *v bodě* t_0, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in J$ z $0 < |t - t_0| < \delta$ plyne $\gamma(t) \in \mathrm{B}^\varepsilon(a_0)$.

K důkazu následující věty je nezbytný předpoklad nenulové délky intervalu J.

Věta 14.1. *Pokud a_0 i a_1 je limitou bodové funkce γ v bodě t_0, pak $a_0 = a_1$.*

Limita bodové funkce je tedy určena jednoznačně. Proto pro ni můžeme zvolit označení. Píšeme

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} \gamma(t).$$

Bodová funkce $\gamma\colon J \to A$ se nazývá *spojitá v bodě* $t_0 \in J$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí

$$\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0).$$

Funkce γ se nazývá *spojitá*, je-li spojitá v každém bodě intervalu J. V takovém případě také říkáme, že je *třídy* C^0.

Pro kartézskou afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$ eukleidovského prostoru A označme γ^i i-tou složku funkce γ vzhledem k φ, tedy funkci $\gamma^i\colon J \to \mathrm{R}$ danou předpisem

$$\gamma^i(t) = \gamma(t)^i_\varphi.$$

Bodové funkce se obvykle zadávají právě pomocí jejich složek vzhledem k nějaké dané kartézské bázi.

Věta 14.2. *Pro libovolné $t_0 \in J$ platí*

$$\left(\lim_{t \to t_0} \gamma(t)\right)^i_\varphi = \lim_{t \to t_0} \gamma^i(t).$$

Věta 14.3. *Bodová funkce γ je spojitá v bodě t_0, právě když je v tomto bodě spojitá každá její složka vzhledem k bázi φ.*

14.2 Derivace bodové funkce

Pro bodovou funkci $\gamma\colon J \to A$ a bod $t_0 \in J$ je předpisem

$$g(t) = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

definována vektorová funkce $g : J \setminus \{t_0\} \to U$ (U je zaměření eukleidovského prostoru A). Jelikož vektorové funkce jsou současně bodovými funkcemi (vektorový prostor se skalárním součinem U můžeme chápat i jako eukleidovský prostor), můžeme uvažovat limitu funkce g:

$$\dot\gamma(t_0) = \lim_{t \to t_0} g(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Pokud tato limita existuje, jde o vektor z vektorového prostoru U. Funkce γ se pak nazývá *diferencovatelná v bodě* t_0 a vektor $\dot\gamma(t_0)$ její *derivace v bodě* t_0. (Místo obvyklého γ' píšeme v tomto případě $\dot\gamma$ a původní značení si rezervujeme na později.) Je-li funkce γ diferencovatelná v každém bodě intervalu J, nazývá se prostě *diferencovatelná*.

Věta 14.4. *Je-li bodová funkce γ diferencovatelná v bodě t_0, je v něm i spojitá.*

Důkaz. Plyne z Věty 14.2 a známých vlastností reálných funkcí reálné proměnné.

Je-li funkce γ diferencovatelná v každém bodě $t \in J$, je $\dot\gamma$ vektorová (a tedy i bodová) funkce, $\dot\gamma\colon J \to U$. Nazývá se *derivace bodové funkce* γ. Její derivace (pokud existuje) se nazývá *druhá derivace funkce* γ a značí $\ddot\gamma$. Podobně jsou definovány i vyšší derivace. k-tá derivace funkce γ se značí $\gamma^{(k)}$.

Funkce γ se nazývá *spojitě diferencovatelná* (nebo *třídy* C^1), je-li diferencovatelná a funkce $\dot\gamma$ je spojitá. Funkce γ se nazývá *dvakrát spojitě diferencovatelná* (nebo *třídy* C^2), je-li dvakrát diferencovatelná (tedy existuje-li $\ddot\gamma(t)$ pro každé $t \in J$) a funkce $\ddot\gamma$ je spojitá. Podobně se definuje spojitá diferencovatelnost pro vyšší řády. Vektorová funkce, která je k-krát spojitě diferencovatelná pro libovolné k, se nazývá *hladká* a říká se, že je *třídy* C^∞.

Nyní se podíváme na to, jak lze spočítat derivaci bodové funkce, máme-li funkci vyjádřenu v kartézské afinní bázi. Uvidíme, že je to jednoduché: stačí vypočítat derivace složek funkce, což je úkol, který umíme řešit z matematické analýzy.

Věta 14.5. *Je-li γ bodová funkce a $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ její složky vzhledem ke kartézské bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$, pak pro i-tou složku (vzhledem k bázi α) její derivace v bodě t platí*

$$(\dot\gamma(t))^i = (\gamma^i)'(t).$$

Příklad 14.1. Pokud je tedy například funkce $\gamma\colon [-2\pi, 2\pi] \to A$ dána v kartézské bázi φ předpisem

$$\gamma(t)_\varphi = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix},$$

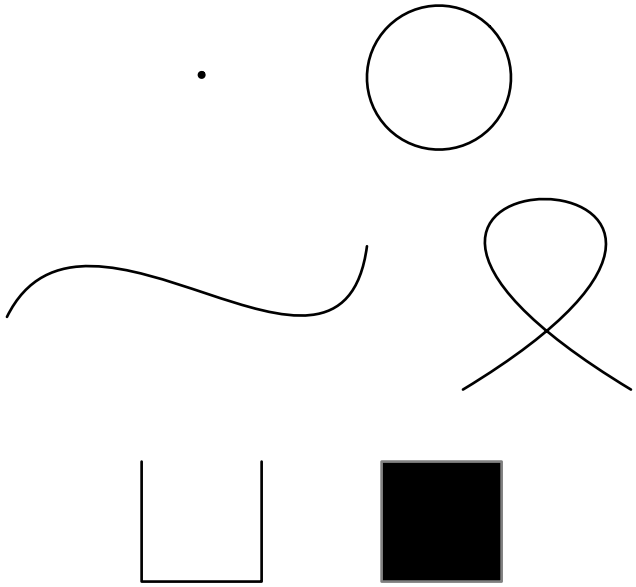
platí pro její derivaci

$$\dot\gamma(t)_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14.3 Křivky a parametrizace

Nyní předpokládejme, že bodová funkce $\gamma\colon J \to A$ je spojitá a soustřeďme se na její *obraz*, tedy na množinu $\gamma(J) = \{\gamma(t) \mid t \in J\} \subseteq A$. Funkci γ můžeme chápat jako popis pohybu částice po množině $\gamma(J)$: částice se v čase $t \in J$ nachází v bodě $\gamma(t)$ a během svého pohybu navštíví všechny body množiny $\gamma(J)$. Spojitost funkce γ je zde přirozeným požadavkem, protože částice se pohybuje plynule.

Příklad 14.2. Na obrázku 14.1 je znázorněno několik množin $\gamma(J)$ v rovině pro spojitou bodovou funkci γ. V prvním případě jde o bod; funkce γ by mohla být (v nějaké kartézské



Obrázek 14.1: Příklady množin $\gamma(J)$ pro spojitou bodovou funkci γ

bázi φ) dána například předpisem

$$\gamma(t)_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ve druhém případě jde o kružnici. Kdyby měla střed v bodě o souřadnicích $[0,0]$ a poloměr 1, funkce γ by mohla být dána předpisem

$$\gamma(t)_\varphi = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

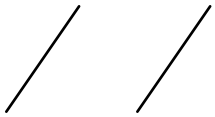
Třetí a čtvrtý případ jsou kubické Bézierovy křivky, jak byly definovány v příkladě 3.4 (třetí případ je křivka stejného tvaru jako v příkladě). Když zachováme značení z příkladu, dostaneme následující předpis pro funkci γ:

$$\gamma(t)_\varphi = t^3(a_0)_\varphi + 3t^2(1-t)(a_1)_\varphi + 3t(1-t)^2(a_2)_\varphi + (1-t)^3(a_3)_\varphi$$

pro $t \in J = [0,1]$.

Nalezení předpisu pro funkci γ v pátém případě necháme na čtenáři. Šestý případ ukazuje, že i pro spojitou funkci γ může množina $\gamma(J)$ nabývat nečekané podoby. Funkce γ se v tomto případě nazývá *Peanova křivka*. Její definice přesahuje rámec tohoto textu.

Příklad 14.3. Na obrázku 14.2 vidíme příklad množiny, která nemůže být obrazem $\gamma(J)$ žádné spojité bodové funkce γ. To koresponduje s představou plynulého (bez skoků) pohybu částice, který má být modelován funkcí γ.



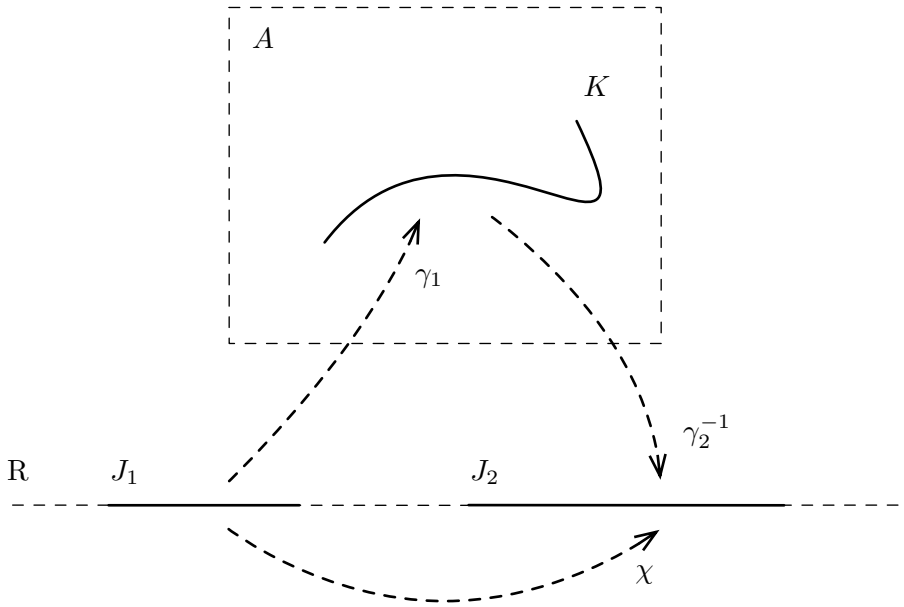
Obrázek 14.2: Příklad množiny, která se nerovná $\gamma(J)$ pro žádnou spojitou bodovou funkci γ

Jak už jsme řekli, množinu $\gamma(J)$ můžeme chápat jako dráhu pohybující se částice. Aby z ní bylo zřejmé, kudy se částice pohybovala (a také z technických důvodů), budeme požadovat, aby

- z množiny byly zřejmé počáteční a koncový bod pohybu (mezi nimi ovšem rozlišit nemůžeme),
- cesta částice byla v každém bodě jednoznačně určena (kromě směru),
- částice se mohla po celé množině pohybovat bez zastavení,
- nenavštívila žádný bod vícekrát.

Tyto intuitivní (a hodně omezující) požadavky vylučují první, druhý, pátý a šestý případ z příkladu 14.2 a samozřejmě také příklad 14.3.

Jak se ukazuje, požadavky jsou splněny, pokud je funkce γ injektivní, diferencovatelná a pro každé $t \in J$ platí $\dot{\gamma}(t) \neq 0$. V takovém případě se množina $\gamma(J)$ nazývá *jednoduchou regulární křivkou* (nebo prostě *křivkou*) a funkce γ její *parametrizací*. Pokud pro křivku $K \subseteq A$ existuje parametrizace se silnější vlastností diferencovatelnosti, přisuzujeme tuto vlastnost i křivce. Existuje-li tedy například parametrizace γ třídy C^2, říkáme i o křivce K, že je třídy C^2.



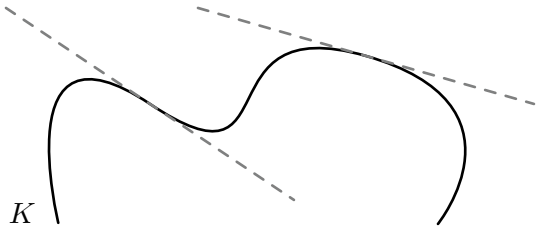
Obrázek 14.3: Změna parametru

Pro libovolné dvě parametrizace $\gamma_1 : J_1 \to A$, $\gamma_2 : J_2 \to A$ třídy $\mathbf{C}^k$ křivky K je funkce $\chi : J_1 \to J_2$ daná předpisem $\chi(t) = \gamma_2^{-1}(\gamma_1(t))$ také třídy $\mathbf{C}^k$ a nazývá se *změna parametru od* γ_1 *k* γ_2. Je znázorněna na obr. 14.3.

Věta 14.6. *Mějme dvě parametrizace* $\gamma_1 : J_1 \to A$, $\gamma_2 : J_2 \to A$ *křivky* K *a parametry* $t_1 \in J_1$, $t_2 \in J_2$ *takové, že* $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. *Pak vektory* $\dot\gamma_1(t_1)$ *a* $\dot\gamma_2(t_2)$ *jsou lineárně závislé.*

Pro libovolný bod $a \in K$ je tedy jednoznačně určena přímka $B \subseteq A$: je dána bodem a a vektorem $\dot\gamma(t)$, kde γ je libovolná parametrizace křivky K a t splňuje $\gamma(t) = a$. Tato přímka se nazývá *tečnou přímkou ke křivce* K *v bodě* a. Vektor $\dot\gamma(t)$ pak *tečným vetorem ke křivce* K *v bodě* a.

Definice tečné přímky ke křivce odpovídá intuitivnímu pojetí tečny, viz obr. 14.4.



Obrázek 14.4: Dvě tečné přímky ke křivce

Chápeme-li parametrizaci γ jako popis pohybu částice po křivce K, interpretujeme vektor $\dot{\gamma}(t)$ jako vektor okamžité rychlosti částice v čase t.

14.4 Délka křivky

Zaměřme se nyní na problém zjištění délky křivky. Co je potřeba především udělat, je délku křivky *definovat* tak, aby odpovídala praktické zkušenosti. Pomůžeme si naší interpretací parametrizace jako popisu pohybu částice.

Mějme parametrizaci $\gamma\colon J \to A$ křivky K, kde $J = [t_0, t_1]$. Hledáme funkci $L\colon J \to \mathbf{R}$ takovou, že hodnota $L(t)$ je délkou části křivky K od bodu $\gamma(t_0)$ k bodu $\gamma(t)$. Zvolme parametry $t, s \in J$, $t < s$. Číslo $L(s) - L(t)$ je délka části křivky K od bodu $\gamma(t)$ k bodu $\gamma(s)$.

Chápeme-li funkci γ jako popis pohybu částice, je hodnota $s - t$ čas, který částice potřebuje, aby se dostala z bodu $\gamma(t)$ do bodu $\gamma(s)$. Průměrná rychlost částice na této dráze je tedy

$$\frac{L(s) - L(t)}{s - t}.$$

Velikost okamžité rychlosti částice v čase t je tedy rovna

$$\lim_{s \to t} \frac{L(s) - L(t)}{s - t} = L'(t).$$

(Z matematické analýzy ostatně víme, že derivace funkce vyjadřující vývoj nějaké veličiny se interpretuje jako okamžitá rychlost změny veličiny.) Tuto hodnotu ovšem umíme spočítat jinak; jelikož $\dot{\gamma}(t)$ je vektor okamžité rychlosti částice v čase t, musí platit

$$L'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Současně samozřejmě $L(t_0) = 0$. Nyní použijeme základní výsledek integrálního počtu, který říká, že existuje jediná funkce L splňující naše požadavky, a totiž funkce

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(s)\| \, \mathrm{d}s. \tag{14.1}$$

Tak jsme našli hledanou funkci L pro výpočet délky křivky.

Uvažme parametrizaci γ takovou, že pro každé $t \in J$ platí $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$. Každá křivka má právě dvě takové parametrizace. Nazývají se *parametrizace obloukem*. Pokud je chápeme jako popis pohybu částice, jde o rovnoměrný (ne ovšem nutně přímočarý) pohyb jednotkovou rychlostí. V případě parametrizace obloukem používáme pro derivaci (tečný vektor ke křivce, který je v tomto případě jednotkový) také značení γ' místo obecného $\dot{\gamma}$.

Dosazením do rovnice (14.1) hned dostaneme

$$L(t) = t - t_0. \tag{14.2}$$

Délka křivky od bodu $\gamma(t_0)$ k bodu $\gamma(t)$ je tedy v případě parametrizace obloukem rovna délce intervalu $[t_0,t]$.

Parametrizaci obloukem lze z obecné parametrizace $\gamma\colon J=[t_0,t_1]\to A$ nalézt takto: pro $t\in J$ položíme $\chi(t)=L(t)$. Dostaneme funkci $\chi: J\to I=[0,L(t_1)]$, která je téže třídy jako funkce γ a má všude nenulovou derivaci. Proto má inverzní funkci a funkce $\tau(s)=\gamma(\chi^{-1}(s))$ je rovněž parametrizace. Lze dokázat, že je to parametrizace obloukem.

14.5 Křivost

Závěrem se ještě stručně zmíníme o pojmu křivosti křivky. Je to hodnota, která určuje to, co křivostí intuitivně rozumíme: křivost úsečky je v každém bodě nulová, křivost části kružnice (celou kružnici naše jednoduchá definice bohužel nezahrnuje mezi křivky) je v každém bodě stejná a je tím větší, čím menší je poloměr. Mezi křivostí kružnice a jejím poloměrem navíc panuje jednoduchý vztah.

Křivost křivky definujeme pomocí parametrizace obloukem. Je-li $K\subseteq A$ křivka a γ její parametrizace obloukem, pak *normálovým vektorem* křivky v bodě $\gamma(t)$ rozumíme vektor $\gamma''(t)$.

Věta 14.7. *Tečný a normálový vektor křivky v daném bodě jsou vždy ortogonální.*

Délku $\kappa(t)$ vektoru $\gamma(t)$ nazýváme *křivostí křivky K v bodě $\gamma(t)$*.

ÚLOHY KE KAPITOLE 14

14.1. Najděte spojitou funkci γ pro pátou množinu z příkladu 14.2 (obr. 14.1).

14.2. Najděte diferencovatelnou funkci γ pro pátou množinu z příkladu 14.2. Je tato množina jednoduchou diferencovatelnou křivkou?

14.3. Dokažte tvrzení z příkladu 14.3 (zadání si vhodně upřesněte).

14.4. Ukažte, že pro kvadratickou Bézierovu křivku s řícicími body a_0, a_1, a_2 je přímka určená body a_0 a a_1 tečnou přímkou ke křivce v bodě a_0 a přímka určená body a_2 a a_1 je tečnou přímkou ke křivce v bodě a_2. (Viz příklad 3.4.)

14.5. Ukažte, že pro kubickou Bézierovu křivku s řícicími body a_0, a_1, a_2, a_3 je přímka určená body a_0 a a_1 tečnou přímkou ke křivce v bodě a_0 a přímka určená body a_3 a a_2 je tečnou přímkou ke křivce v bodě a_3. (Viz příklad 3.4.)

14.6. Najděte parametrizaci obloukem pro křivku danou parametrizací z příkladu 14.1. Jaká je její délka?

14.7. Zjistěte normálový vektor a křivost křivky dané parametrizací z příkladu 14.1 v každém jejím bodě.

14.8. Najděte vztah mezi křivostí (části) kružnice a jejím poloměrem.

Literatura

[1] Bican L., *Lineární algebra a geometrie.* Praha, Academia, 2004.

[2] Horák P., Janyška J., *Analytická geometrie.* Masarykova univerzita, 2002.

[3] Riddle D.R., *Analytic Geometry.* Brooks Cole, 1998.

[4] Žára J., Felkel P., Beneš B., Sochor J., *Moderní počítačová grafika, 2. vydání.* Computer Press, 2005.

[5] Budinský B., *Analytická a diferenciální geometrie.* Praha, SNTL, 1983.