# Topologie pro informatiky

Poznámky k přednášce

Michal Krupka

30. března 2022

# Obsah


**1 Základy obecné topologie** **5**

1.1 Topologické prostory . . . . . 5
1.2 Báze topologie, systém generátorů . . . . . 7
1.3 Základní množinové operátory, uzavřené množiny . . . . . 7
1.4 Příklady topologických prostorů . . . . . 8
1.5 Podprostory, faktorové prostory a součiny . . . . . 9
1.6 Další vlastnosti topologických prostorů . . . . . 10
1.7 Spojitá zobrazení a homeomorfismy . . . . . 11
1.8 Kompaktní prostory . . . . . 14
CVIČENÍ . . . . . 16

**2 Vybrané aplikace obecné topologie** **19**

2.1 Booleovy algebry . . . . . 19
2.2 Stoneův teorém o reprezentaci Booleových algeber . . . . . 20
2.3 Topologie datových typů . . . . . 22
2.4 Reprezentace reálných čísel . . . . . 26
2.5 Výpočetní důkazy některých topologických tvrzení . . . . . 27
2.6 Rozhodnutelnost . . . . . 27
2.7 Specializační uspořádání na otevřených množinách . . . . . 28
2.8 Denotační sémantika . . . . . 28
CVIČENÍ . . . . . 30

**3 Základy algebraické topologie** **33**

3.1 Homotopická ekvivalence topologických prostorů . . . . . 33
3.2 Oblouková souvislost, jednoduchá souvislost . . . . . 34
3.3 Singulární homologie . . . . . 34
3.4 Přesné posloupnosti $\mathbf{Z}$-modulů . . . . . 36
3.5 Dlouhá Mayerova-Vietorisova posloupnost . . . . . 37
3.6 Simpliciální komplexy, simpliciální homologie . . . . . 38

CVIČENÍ . . . . . 39

**4 Aplikace algebraické topologie v asynchronních výpočtech 41**

4.1 Rozhodovací úlohy . . . . . 41

4.2 Topologické zadání rozhodovacích úloh . . . . . 43

4.3 Hlavní věta . . . . . 43

# Kapitola 1

# Základy obecné topologie

## 1.1 Topologické prostory

Výchozím příkladem jsou otevřené množiny v $\mathbf{R}^n$. To jsou, jak známo, množiny, které „neobsahují prvky své hranice“. Lze si je také představit jako množiny, které „obklopují každý svůj bod ze všech stran“. To se dá říci i tak, že „k bodům otevřené množiny nelze dojít, aniž bychom předtím navštívili jiné její body“. Je samozřejmě dobře, že si umíme otevřené množiny nějak představit, ale pro další zkoumání jejich vlastností je vhodné nalézt přesnou definici, která těmto představám odpovídá.

Jedna z možností je následující. *Otevřený kvádr v* $\mathbf{R}^n$ definujeme jako kartézský součin $n$ otevřených intervalů. Tedy, množina $(a^1,b^1)\times(a^2,b^2)\times\cdots\times(a^n,b^n)$, kde $a^1,\dots,a^n$ a $b^1,\dots,b^n$ jsou čísla, je otevřený kvádr v $\mathbf{R}^n$. Uvedená čísla můžeme chápat jako složky bodů $a=(a^1,\dots,a^n)$ a $b=(b^1,\dots,b^n)$ z $\mathbf{R}^n$. Náš otevřený kvádr pak můžeme označit stručněji jako $(a,b)$.

Teď přijde přesná definice otevřené množiny, která odpovídá výše uvedené intuitivní představě. Množina $U\subseteq\mathbf{R}^n$ je *otevřená*, pokud pro každý její bod $x$ existuje otevřený kvádr obsahující bod $x$, který je podmnožinou množiny $U$.

**Příklad 1.1.** Existuje mnoho ekvivalentních variant definice otevřené množiny v $\mathbf{R}^n$. Místo „otevřený kvádr obsahující bod $x$“ jsme stejně tak mohli napsat například „otevřená krychle obsahující bod $x$“, nebo „otevřená koule obsahující bod $x$“. Místo „obsahující bod $x$“ je možné vždy uvést i „se středem v bodě $x$“ (definici otevřené krychle, koule a středu si doplňte sami). Vždy bychom došli ke stejnému pojmu otevřené množiny.

**Příklad 1.2.** Každá otevřená množina v $\mathbf{R}^n$ je sjednocením otevřených kvádrů (krychlí, koulí).

**Příklad 1.3.** Pokud definici oslabíme tak, že splnění její podmínky budeme požadovat pouze pro body $x$, jejichž všechny složky jsou racionální čísla, dostaneme opět ekvivalentní definici.

**Příklad 1.4.** Z předchozích dvou příkladů lze odvodit, že každá otevřená množina v $\mathbf{R}^n$ je *spočetným* sjednocením otevřených kvádrů (krychlí, koulí) a naopak.

**Příklad 1.5.** U otevřených kvádrů a krychlí zase stačí požadovat, aby koncové body otevřených intervalů, jichž jsou kartézským součinem, byly vždy racionální čísla. U koulí můžeme požadovat, aby měly racionální poloměr a všechny složky středu. Pomocí toho můžeme dojít ke stejnému výsledku jako v Př. 1.4.

**Příklad 1.6.** Otevřené kvádry (koule, krychle) v $\mathbf{R}$ jsou otevřené intervaly. Každá otevřená množina v $\mathbf{R}$ je tedy spočetným sjednocením otevřených intervalů (a naopak).

Systém otevřených množin v $\mathbf{R}^n$ má následující zásadní vlastnosti:

1. $\emptyset$ a $\mathbf{R}^n$ jsou otevřené,
2. průnik libovolných dvou otevřených množin je otevřená množina,
3. sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

Tyto vlastnosti vezmeme za základ obecné definice. *Topologie* (*topologická struktura*) *na množině* $X$ je systém $\tau$ podmnožin $X$ splňující

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$,
2. jestliže $U, V \in \tau$, pak i $U \cap V \in \tau$,
3. jestliže $\sigma \subseteq \tau$, pak i $\bigcup \sigma \in \tau$.

Množinu $X$ společně s topologií $\tau$ nazýváme *topologický prostor*. Množinám z $\tau$ pak říkáme *otevřené množiny v* $X$ (nebo prostě *otevřené množiny*, pokud je $X$ a $\tau$ pevně zvoleno). Otevřená množina $U \ni x$ se nazývá *okolí bodu* $x$.

Dva triviální příklady topologie na množině $X$ (první z nich se tak i jmenuje): *triviální topologie*, ve které jsou otevřené pouze množiny $\emptyset$ a $X$, a *diskrétní topologie*, ve které je otevřená každá podmnožina $X$.

Systém otevřených množin v $\mathbf{R}^n$, definovaných prve, je topologie na $\mathbf{R}^n$, nazývaná *přirozená topologie na* $\mathbf{R}^n$. Pokud neřekneme explicitně něco jiného, budeme množinu $\mathbf{R}^n$ vždy uvažovat s touto topologií. Definice pojmu *otevřená množina v* $\mathbf{R}^n$ tedy zůstává v platnosti.

Topologie $\tau$ a $\tau'$ na $X$ jsou *srovnatelné*, pokud $\tau \subseteq \tau'$ nebo naopak. V prvním případě se říká, že $\tau$ je *slabší* než $\tau'$ a $\tau'$ je *silnější* než $\tau$ (v druhém naopak).

## 1.2 Báze topologie, systém generátorů

Řekneme, že topologie $\tau$ na množině $X$ je *generovaná systémem množin* $\sigma \subseteq \tau$, jestliže každá otevřená množina $U$ je sjednocením nějakých množin z $\sigma$. V takovém případě také říkáme, že $\sigma$ je *báze topologie* $\tau$ (*báze otevřených množin v* $X$).

Systém všech otevřených kvádrů (krychlí, koulí) v $\mathbf{R}^n$ je tedy příkladem báze přirozené topologie v $\mathbf{R}^n$. V $\mathbf{R}$ je to tedy systém všech otevřených intervalů.

Následující věta odpovídá na otázku, kdy je systém podmnožin množiny $X$ bazí nějaké topologie na $X$.

**Věta 1.1.** *Mějme systém $\sigma$ podmnožin množiny $X$. Pak $\sigma$ je bazí nějaké topologie na $X$, právě když jsou splněny tyto dvě podmínky:*

1. $\bigcup \sigma = X$,
2. *Pro každé $U_1, U_2 \in \sigma$ a $x \in U_1 \cap U_2$ existuje $V \in \sigma$ takové, že $x \in V \subseteq U_1 \cap U_2$.*

**Věta 1.2.** *Topologie generovaná bazí $\sigma_1$ je silnější než topologie generovaná bazí $\sigma_2$, právě když pro každou množinu $U_2 \in \sigma_2$ a bod $x \in U_2$ existuje množina $U_1 \in \sigma_1$ taková, že $x \in U_1 \subseteq U_2$.*

Obecnější než pojem báze topologie je pojem systému generátorů. Systém $\sigma \subseteq \tau$ se nazývá *systém generátorů topologie* $\tau$, jestliže systém všech konečných průniků množin ze $\sigma$ je báze topologie $\tau$.

**Věta 1.3.** *Systém $\sigma$ podmnožin množiny $X$ je systémem generátorů nějaké topologie na $X$, právě když $\sigma$ je pokrytím $X$.*

## 1.3 Základní množinové operátory, uzavřené množiny

Mějme množinu $A \subseteq X$. Bod $x \in X$ se nazývá

- *vnitřním bodem* $A$, jestliže existuje jeho okolí, které je podmnožinou $A$;
- *bodem uzávěru* $A$, jestliže v každém jeho okolí leží bod množiny $A$;
- *hraničním bodem* $A$, jestliže v každém jeho okolí leží jak bod množiny $A$, tak bod neležící v $A$;
- *vnějším bodem* $A$, jestliže existuje jeho okolí, jehož žádný bod neleží v $A$.

Množina všech vnitřních bodů, bodů uzávěru, hraničních bodů a vnějších bodů množiny $A$ se značí (pořadě) $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$, $\operatorname{fr} A$ a $\operatorname{ext} A$.

Množina $A \subseteq X$ se nazývá *uzavřená*, pokud je množina $X \setminus A$ otevřená.

**Příklad 1.7.** Uzavřené množiny jsou právě pevné body uzávěrového operátoru cl.

Topologii na $X$ lze zavést i pomocí systému uzavřených množin:

**Věta 1.4.** *Systém $\sigma$ podmnožin množiny $X$ je systémem všech uzavřených množin v nějaké topologii na $X$, právě když jsou splněny tyto tři podmínky:*

1. $\emptyset \in \sigma, X \in \sigma$,
2. *jestliže* $U, V \in \sigma$, *pak i* $U \cup V \in \tau$,
3. *jestliže* $\sigma' \subseteq \sigma$, *pak i* $\bigcap \sigma' \in \sigma$.

Systém $\sigma$ podmnožin topologického prostoru $X$ je *báze uzavřených množin* $X$, jestliže každá množina ze $\sigma$ je uzavřená a každá uzavřená množina v $X$ je průnikem nějakých množin ze $\sigma$.

## 1.4 Příklady topologických prostorů

**Příklad 1.8.** *Topologie levých paprsků* na $\mathbf{R}$ je generovaná otevřenými intervaly $(-\infty, a)$, $a \in \mathbf{R}$. Tato topologie je slabší než přirozená topologie na $\mathbf{R}$. Množinu $\mathbf{R}$ s topologií levých paprsků budeme značit $\mathbf{R}_{\mathrm{lr}}$.

Podobně topologie pravých paprsků.

**Příklad 1.9.** *Sorgenfreyova topologie na* $\mathbf{R}$ je topologie generovaná intervaly $[a, b)$. Je silnější než přirozená topologie. Množinu $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií budeme značit $\mathbf{R}_{\mathrm{S}}$

**Příklad 1.10.** *Topologie konečných doplňků* na libovolné množině je topologie, jejíž uzavřené množiny tvoří všechny konečné množiny. Na konečné množině je tato topologie totožná s diskrétní topologií. Na $\mathbf{R}$ je slabší než přirozená topologie.

**Příklad 1.11.** Množina $U \subseteq \mathbf{R}$ je *pozorovatelná* (*observable*), pokud číslo $x$ leží v $U$ právě když lze tuto skutečnost potvrdit pozorováním v konečném čase. Problém je v tom, že reálná čísla mají nekonečný desetinný rozvoj, takže např. potvrdit v konečném čase shodnost dvou čísel nejde. Proto jednoprvkové množiny pozorovatelné nejsou.

V konečném čase ale lze potvrdit, že číslo $x$ je větší než zadané číslo $a$. Skutečně, stačí najít první cifru čísla $x$, která je větší než odpovídající cifra čísla $a$ (pokud pro jednoduchost uvažujeme kladná čísla a neřešíme problém s nekonečným opakováním devítek v desetinném rozvoji). Proto interval $(a, +\infty)$ je pozorovatelný.

Průnik dvou pozorovatelných množin je pozorovatelná množina. Skutečně, pokud $U$ a $V$ jsou pozorovatelné, pak pro číslo $x$ nejprve v konečném čase ověříme,

že patří do $U$, a pak totéž pro $V$. V případě sjednocení množin $U$ a $V$ postupujeme paralelně; to předpokládáme, že umíme, a to i pro nekonečně mnoho množin. Proto jsme schopni potvrdit v konečném čase i příslušnost prvku $x$ k sjednocení nekonečně mnoha pozorovatelných množin. Prázdná množina i $\mathbf{R}$ jsou evidentně pozorovatelné. Dostáváme tedy, že systém všech pozorovatelných množin v $\mathbf{R}$ je topologie. Lze ukázat, že je to přesně přirozená topologie.

Jakou topologii dostaneme, ovšem záleží na zvolené reprezentaci reálných čísel. Naše reprezentace desetinným rozvojem není ani zdaleka jediná a nejlepší.

**Příklad 1.12.** *Sierpińského prostor* je množina $\mathbf{S} = \{0,1\}$ s topologií generovanou bazí $\{\{1\},\{0,1\}\}$.

**Příklad 1.13.** Uvažujme množinu Fml formulí výrokové logiky s výrokovými symboly $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ a spojkami $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Pro formuli $\varphi$ označme $U_\varphi$ množinu všech ohodnocení $e\colon P \to \{0,1\}$, pro která je formule $\varphi$ pravdivá; tj. $\|\varphi\|_e = 1$. Množiny $U_\varphi$ tvoří bázi topologie na $X = \{0,1\}^P$. Omezíme-li se pouze na formule tvaru $p_i$ a $\neg p_i$, dostaneme systém generátorů stejné topologie. V této topologii jsou množiny $U_\varphi$ otevřené i uzavřené současně. Uzavřené množiny v $X$ jsou právě množiny modelů teorií: je-li $T \subseteq$ Fml teorie, je množina $\mathrm{Mod}_T = \{e \in \{0,1\}^P \mid \|\varphi\|_e = 1$ pro každé $\varphi \in T\}$ uzavřená, a naopak, pro každou uzavřenou množinu $A$ existuje teorie $T$ taková, že $A = \mathrm{Mod}_T$.

## 1.5 Podprostory, faktorové prostory a součiny

Každou podmnožinu $Y$ topologického prostoru $X$ uvažujeme automaticky s tzv. *indukovanou topologií*, což je topologie tvořená množinami $U \cap Y$, kde $U$ jsou otevřené množiny v $X$. Množina $Y$ spolu s indukovanou topologií se nazývá *podprostor topologického prostoru* $X$.

**Příklad 1.14.** Množiny otevřené v $Y$ nemusí být otevřené v $X$. Uvažme například interval $[0,1)$ v $\mathbf{R}$. Tento interval není otevřená množina v $\mathbf{R}$, ale je otevřenou množinou v podprostoru $[0,2]$. Podobně, vnitřek, hranice, uzávěr a vnějšek množiny $A \subseteq Y$, uvažované v podprostoru $Y$ mohou být jiné, než pokud je uvažujeme v $X$.

Máme-li na topologickém prostoru $X$ zadanou ekvivalenci $\approx$, zavádíme na faktor množině $X/_\approx$ *topologii faktorového prostoru* (*faktorprostoru*) takto: množina $U \subseteq X/_\approx$ je otevřená právě když je množina všech $x \in X$ takových, že $[x]_\approx \in U$, otevřená v $X$.

Konečně, je-li $X_\iota$ ($\iota \in I$) systém množin, označíme $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ jejich kartézský součin a pro každé $\iota \in I$ označíme $\pi_\iota$ příslušnou kartézskou projekci, $\pi_\iota : \prod_{\kappa \in I} X_\kappa \to X_\iota$. Dále označíme $\pi_\iota(x) = x_\iota$.

Jsou-li $X_\iota$ ($\iota \in I$) topologické prostory, zavádíme na $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ *topologii součinu* jako topologii, jejímž systémem generátorů je systém množin $\pi_\iota^{-1}(U)$ ($\iota \in I$, $U$ otevřená v $X_\iota$).

**Příklad 1.15.** Topologie součinu na $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$ splývá s přirozenou topologií na $\mathbf{R}^n$.

**Příklad 1.16.** Topologický prostor $X$ je diskrétní, právě když je diagonála v součinu $X \times X$ otevřená. (Diagonála v $X \times X$ je množina $\{(x,x) \mid x \in X\}$.)

**Příklad 1.17.** Topologie na prostoru $\{0,1\}^P$ z Př. 1.13 je topologie součinu, kde množina $\{0,1\}$ se uvažuje s diskrétní topologií.

## 1.6 Další vlastnosti topologických prostorů

Topologický prostor $X$ se nazývá *Hausdorffův*, jestliže pro každé dva různé body $x, y \in X$ existují disjunktní okolí $U \ni x$ a $V \ni y$.

**Příklad 1.18.** Topologický prostor $X$ je Hausdorffův, právě když je diagonála v součinu $X \times X$ uzavřená.

**Příklad 1.19.** Podprostory a součiny konečně mnoha Hausdorffových prostorů jsou Hausdorffovy prostory. S faktorovými prostory je to složitější.

Množina $A \subseteq X$ se nazývá *hustá*, jestliže $\mathrm{cl}A = X$. Topologický prostor je *separabliní*, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

**Příklad 1.20.** Podprostory, faktorprostory a součiny spočetně mnoha separabilních prostorů jsou separabilní prostory.

Topologický prostor $X$ je *nesouvislý*, pokud v něm existují neprázdné disjunktní otevřené množiny $U$ a $V$, jejichž sjednocení je rovno $X$. $X$ je *souvislý*, pokud není nesouvislý.

**Věta 1.5.** *Součin neprázdných topologických prostorů je souvislý, právě když je každý z těchto prostorů souvislý.*

**Příklad 1.21.** Faktorový prostor souvislého prostoru je souvislý. Tento výsledek je speciálním případem poznatku, který uvedeme později. Podprostor souvislého prostoru samozřejmě souvislý být nemusí.

Vlastnosti topologických prostorů lze zkoumat i u jejich podmnožin tak, že je uvažujeme s indukovanou topologií. Proto můžeme hovořit například o souvislých podmnožinách topologického prostoru.

**Věta 1.6.** *Množina $A \subseteq X$ je nesouvislá, právě když existují dvě neprázdné otevřené množiny $U, V \subseteq X$ takové, že*

1. $A \subseteq U \cup V$,
2. $U \cap V \cap A = \emptyset$.

Důležitý je následující výsledek pro souvislé množiny v $\mathbf{R}$.

**Věta 1.7.** *Souvislé množiny v $\mathbf{R}$ jsou právě intervaly.*

Topologický prostor se nazývá *totálně nesouvislý*, jestliže nemá netriviální souvislé podmnožiny, tj. jestliže jedině prázdná a jednoprvkové podmnožiny jsou souvislé. Topologický prostor je *extrémně* (*extremálně*) *nesouvislý*, je-li uzávěrem každé jeho otevřené množiny otevřená množina.

**Příklad 1.22.** Topologický prostor $\mathbf{Q}$ je totálně nesouvislý, není ale extrémně nesouvislý.

**Příklad 1.23.** Topologický prostor ohodnocení z Př. 1.13 je totálně nesouvislý. Důkaz je jednoduchý. Stačí si uvědomit vlastnosti množin $U_p$ a $U_{\neg p}$ pro libovolnou proměnnou $p$.

## 1.7 Spojitá zobrazení a homeomorfismy

O zobrazení $f$ topologických prostorů $X$ a $Y$ řekneme, že je *spojité*, jestliže pro každou otevřenou množinu $V$ v $Y$ je množina $f^{-1}(V)$ otevřená v $X$, a *otevřené*, jestliže pro každou otevřenou množinu $U$ v $X$ je množina $f(U)$ otevřená v $Y$. Zobrazení $f$ se nazývá *homeomorfismus*, je-li bijektivní, spojité a otevřené. Evidentně, inverze homeomorfismu (která existuje, protože homeomorfismus je bijekce) je homeomorfismus. Topologické prostory $X$ a $Y$ jsou *homeomorfní*, existuje-li mezi nimi homeomorfismus.

Zobrazení $f$ je *spojité v bodě $x \in X$*, jestliže pro každé okolí $V$ bodu $f(x)$ existuje okolí $U$ bodu $x$ tak, že $f(U) \subseteq V$. Spojitost v bodě souvisí se spojitostí takto:

**Věta 1.8.** *Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité, právě když je spojité v každém bodě $x \in X$.*

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve spojitost zobrazení $f$ a zvolme $x \in X$ a okolí $V \ni f(x)$. Podle definice je množina $f^{-1}(V)$ otevřená v $X$. Položíme-li tedy $U = f^{-1}(V)$, máme $f(U) = V$, což dokazuje spojitost $f$ v bodě $x$.

Naopak, nechť zobrazení $f$ je spojité v každém bodě. Pro otevřenou množinu $V \subseteq Y$ a bod $x \in f^{-1}(V)$ (tj. takový, že $f(x) \in V$) existuje podle definice okolí $U_x$, pro které

platí $f(U_x) \subseteq V$. Tato podmínka se dá přepsat na $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Platí $\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x = f^{-1}(V)$. Množina $f^{-1}(V)$ je tedy otevřená, protože je sjednocením otevřených množin. □

**Věta 1.9.** *Je-li zobrazení $f : X \to Y$ spojité v bodě $x$ a zobrazení $g : Y \to Z$ spojité v bodě $f(x)$, je složené zobrazení $g \circ f$ spojité v bodě $x$. Jsou-li $f$ a $g$ spojitá, je spojité i $g \circ f$.*

**Věta 1.10.** *Kartézské projekce $\pi_\iota : \prod_{\kappa \in I} X_\kappa \to X_\iota$ ($\iota \in I$) jsou spojité a otevřené.*

Pro zobrazení $f : X \to \prod_{\iota \in I} X_\iota$ značíme $f^\iota = \pi_\iota \circ f$. Tato zobrazení se nazývají *složky zobrazení* $f$. Zobrazení $f$ pak můžeme zapisovat takto: $f = (f^\iota)_{\iota \in I}$.

**Věta 1.11.** *Zobrazení $f : X \to \prod_{\iota \in I} X_\iota$ je spojité, právě když je spojitá každá jeho složka.*

*Kartézský součin zobrazení* $f_\iota : X_\iota \to Y_\iota$ ($\iota \in I$) je zobrazení $f : X \to Y$, kde $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ a $Y = \prod_{\iota \in I} Y_\iota$, definované pro libovolné $x \in X$ předpisem $\pi_\iota^Y(f(x)) = f_\iota(\pi_\iota^X(x))$. Zobrazení $f$ značíme také $\prod_{\iota \in I} f_\iota$.

**Věta 1.12.** *Kartézský součin $\prod_{\iota \in I} f_\iota$ zobrazení $f_\iota : X_\iota \to Y_\iota$ ($\iota \in I$) je spojitý, právě když je spojité každé ze zobrazení $f_\iota$.*

**Věta 1.13.** *Je-li topologický prostor $X$ souvislý a zobrazení $f : X \to Y$ spojité, pak množina $f(X) \subseteq Y$ je souvislá v $Y$.*

**Příklad 1.24.** Lze snadno ověřit, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ a množinu $B \subseteq Y$ platí $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. Tento výsledek lze použít k důkazu tvrzení, že *zobrazení $f$ je spojité, právě když vzorem každé uzavřené množiny v $Y$ je uzavřená množina v $X$.*

**Příklad 1.25.** Otevřené množiny v topologickém prostoru $X$ jsou v bijekci se spojitými zobrazeními z $X$ do Sierpińského prostoru $\mathbf{S}$. Množina $U \subseteq X$ je totiž otevřená, právě když její charakteristická funkce $\chi_U : X \to \mathbf{S}$ je spojitá.

**Příklad 1.26.** Pomocí předchozího příkladu lze výsledky o otevřených množinách přeformulovat v jazyce spojitých zobrazení. Např. výsledky z Příkladů 1.16 a 1.18 lze vyjádřit takto: Topologický prostor $X$ je diskrétní, právě když zobrazení $= : X \times X \to \mathbf{S}$ je spojité. Topologický prostor $X$ je Hausdorffův, právě když zobrazení $\neq : X \times X \to \mathbf{S}$ je spojité.

**Příklad 1.27.** Indukovaná topologie na podmnožině $Y$ topologického prostoru $X$ je nejmenší topologie taková, že inkluze $Y \to X$ je spojitá. Topologie součinu na množině $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ je nejmenší topologie taková, že všechny kartézské projekce $\pi_\iota$ jsou spojité. Konečně, topologie faktorového prostoru $X/_\approx$ je největší topologie taková, že faktorová projekce $X \to X/_\approx$ je spojitá.

**Příklad 1.28.** Je-li $f : X \to Y$ spojité zobrazení a $X' \subseteq X$ podmnožina, je zúžení tohoto zobrazení na $X'$ (uvažovanou s indukovanou topologií) rovněž spojité. K tomuto výsledku lze elegantně dojít využitím Věty 1.9, pokud si uvědomíme, že zmíněné zúžení je kompozicí zobrazení $f$ a inkluze $X' \to X$, která je spojitá. Podobně, pokud $Y$ je podprostorem topologického prostoru $Y'$, můžeme rozšířit obor hodnot zobrazení $f$ na množinu $Y'$ a dostaneme opět spojité zobrazení.

**Příklad 1.29.** Výsledky o spojitost funkcí eukleidovských prostorů s přirozenou topologií, známé z matematické analýzy, se hodí ke studiu vlastností těchto prostorů a jejich podprostorů. Například ze spojitosti funkcí cos a sin a Věty 1.11 můžeme dokázat, že zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$ je spojité. Zobrazení, které dostaneme zúžením oboru hodnot funkce $f$ na jednotkovou kružnici se středem v počátku (s indukovanou topologií), je rovněž spojité. Toto zúžení je i otevřené. Není ale bijektivní, takže nejde o homeomorfismus.

**Příklad 1.30.** Libovolné dva ohraničené otevřené intervaly $(a_1, b_1)$ a $(a_2, b_2)$ v $\mathbf{R}$ jsou homeomorfní. Skutečně, funkce $f : (a_1, b_1) \to (a_2, b_2)$, daná předpisem

$$f(x) = a_2 \cdot \frac{b_1 - x}{b_1 - a_1} + b_2 \cdot \frac{x - a_1}{b_1 - a_1},$$

je homeomorfismus. Abychom to ověřili, musíme ukázat, že tato funkce je bijektivní, spojitá a její inverze je rovněž spojitá.

**Příklad 1.31.** Funkce arctg je homeomorfismus $\mathbf{R}$ a intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tyto dvě množiny jsou tedy homeomorfní. Z předchozího příkladu tedy plyne, že libovolný otevřený interval je homeomorfní $\mathbf{R}$.

**Příklad 1.32.** Uzavřený interval $[a, b]$ a $\mathbf{R}$ ovšem homeomorfní nejsou. Pokud by totiž existoval homeomorfismus $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, pak jeho zúžení na interval $(a, b]$ by bylo homeomorfismus tohoto intervalu a $\mathbf{R} \setminus \{f(a)\}$. Podle Věty 1.7 je ovšem interval $(a, b]$ souvislá množina, zatímco množina $\mathbf{R} \setminus \{f(a)\}$ souvislá není. Jsme tedy ve sporu s Větou 1.13.

**Příklad 1.33.** Pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbf{R}_S$ je funkce z $A$ do $\mathbf{R}$ spojitá, právě když je spojitá zprava (podle klasické definice spojitosti zprava).

**Příklad 1.34.** Pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbf{R}$ je funkce z $A$ do $\mathbf{R}_{\mathrm{lr}}$ spojitá, právě když je spojitá shora (podle klasické definice spojitosti shora).

**Příklad 1.35.** Pokračujme v (jen hrubě formulovaných) úvahách z Př. 1.11. Funkci $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nazveme *vyčíslitelnou*, jestliže existuje program, který pro každé číslo $x \in A$ vrátí číslo $f(x)$ a pro každé číslo $x \notin A$ se zacyklí. Čísla přitom chápeme jako v Př. 1.11, tj. jako černé skříňky, které na vyžádání poskytnou požadovanou cifru.

Ukážeme, že *každá vyčíslitelná funkce je spojitá*. Mějme otevřenou množinu $V \subseteq \mathbf{R}$. Pro libovolné číslo $x \in f^{-1}(V)$ lze v konečném čase ověřit, že opravdu je prvkem $f^{-1}(V)$: výpočet hodnoty $f(x)$ potrvá konečně dlouho a ověření příslušnosti $f(x)$ množině $V$ rovněž, protože $V$ je pozorovatelná. Množina $f^{-1}(V)$ je tedy pozorovatelná a tím pádem otevřená.

## 1.8 Kompaktní prostory

Systém $\sigma$ podmnožin topologického prostoru $X$ se nazývá *otevřené pokrytí množiny* $Y \subseteq X$, je-li každá množina ze $\sigma$ otevřená a platí-li $\bigcup \sigma \supseteq A$. Podsystém $\sigma' \subseteq \sigma$ je *podpokrytí pokrytí* $\sigma$, je-li rovněž otevřeným pokrytím $A$.

Podmnožina $A \subseteq X$ se nazývá *kompaktní*, jestliže každé její otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. Samotný topologický prostor $X$ se nazývá kompaktní, je-li kompaktní jakožto podmnožina $X \subseteq X$.

Snadno se ověří, že množina $A \subseteq X$ je kompaktní, právě když je kompaktní jakožto topologický prostor (s indukovanou topologií).

**Příklad 1.36.** Každá konečná množina v $X$ je kompaktní.

**Příklad 1.37.** V triviálním topologickém prostoru je kompaktní každá množina. V diskrétním jsou kompaktní právě konečné množiny.

**Věta 1.14.** *Každá uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní.*

**Věta 1.15.** *Každá kompaktní množina v Hausdorffově prostoru je uzavřená.*

Zatímco předchozí věty jsou snadným důsledkem definice, následující Tichonovův teorém patří k hlubokým topologickým výsledkům. K jeho důkazu lze použít tuto jednoduchou ekvivalentní podmínku kompaktnosti: systém $\rho$ uzavřených množin topologického prostoru se nazývá *centrovaný*, je-li $\bigcap \rho \neq \emptyset$. Platí

**Věta 1.16.** *Topologický prostor $X$ je kompaktní právě když pro každý systém $\rho$ uzavřených množin v $X$ platí: je-li libovolný konečný podsystém systému $\rho$ centrovaný, je centrovaný i systém $\rho$.*

*Náznak důkazu.* K libovolnému systému $\rho$ uzavřených množin můžeme sestrojit systém $\sigma$ doplňků množin z $\rho$. Je to systém otevřených množin a platí, že je otevřeným pokrytím, právě když $\rho$ *není* centrovaný. □

A nyní slíbený Tichonovův teorém.

**Věta 1.17** (Tichonov)**.** *Je-li každý z topologických prostorů $X_\iota$ ($\iota \in I$) kompaktní, je kompaktní i jejich součin $\prod_{\iota \in I} X_\iota$.*

**Věta 1.18.** *Je-li topologický prostor $X$ kompaktní a zobrazení $f : X \to Y$ spojité, je množina $f(X) \subseteq Y$ kompaktní.*

**Věta 1.19.** *Každý uzavřený interval $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ je kompaktní.*

*Důkaz.* Mějme otevřené pokrytí $\sigma$ intervalu $[a,b]$. Nechť $c$ je supremum množiny $D$ prvků $d \in [a,b]$, pro která existuje konečný podsystém $\sigma' \subseteq \sigma$, který je pokrytím intervalu $[a,d]$. Tato množina je jistě neprázdná, protože podmínka je splněna pro $d = a$. Je také shora ohraničená, takže (podle věty o supremu) $c$ existuje. Jelikož všechny prvky množiny $D$ leží v intervalu $[a,b]$, leží v něm i číslo $c$.

Nyní ukážeme, že $c \in D$. Nechť $U \in \sigma$ je otevřená množina obsahující $c$ (ta existuje, protože $\sigma$ je pokrytí) a $d \in U$, $a \leq d < c$. Podle předpokladu takové číslo $d$ existuje a platí $d \in D$. Proto existuje podpokrytí $\sigma' \subseteq \sigma$, které pokrývá interval $[a,d]$. Když k tomuto podpokrytí přidáme množinu $U$, dostaneme podpokrytí pokrytí $\sigma$, pokrývající interval $[a,c]$. Tedy, $c \in D$.

Na závěr dokážeme, že $c = b$. Kdyby totiž bylo $c < b$, najdeme číslo $c' > c$, které rovněž leží v množině $D$. Při jeho hledání postupujeme takto: označme $U$ množinu z konečného podpokrytí $\sigma' \subseteq \sigma$ intervalu $[a,c]$, která obsahuje $c$. Podle vlastností přirozené topologie tato množina obsahuje i nějaký otevřený interval, obsahující $c$. Z tohoto intervalu už vybereme číslo $c'$. □

**Věta 1.20** (Heine-Borel)**.** *Množina $A \subseteq \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

**Věta 1.21.** *Je-li $X$ kompaktní a funkce $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá, pak tato funkce nabývá na $X$ největší a nejmenší hodnoty.*

**Příklad 1.38.** Pokračujme v příkladech 1.13 a 1.17. Víme, že topologie na prostoru $\{0,1\}^P$ všech ohodnocení výrokových proměnných $p_1, p_2, \ldots$ je topologie součinu. Jelikož prostor $\{0,1\}$ je kompaktní, je i součin $\{0,1\}^P$ kompaktní. Odtud se dá snadno odvodit věta o kompaktnosti ve výrokové logice (teorie je bezesporná, právě když je bezesporná každá její konečná podteorie). Lze totiž vyjít z Věty 1.16 a uvědomit si, že pro každou teorii $T$ platí $\mathrm{Mod}_T = \bigcap_{\varphi \in T} \{e \in \{0,1\}^P \mid \|\varphi\|_e = 1\}$. Množina $\mathrm{Mod}_T$ je tedy neprázdná, právě když je systém množin, jehož je průnikem, centrovaný.

**Příklad 1.39.** *Cantorovo diskontinuum* je množina $C \subseteq [0,1]$ tvořená čísly, jež lze zapsat v trojkové soustavě bez použití cifry 1. Lze ji také vytvořit vypuštěním určitých otevřených intervalů z intervalu $[0,1]$ (kterých?). Je to nespočetná, kompaktní, totálně nesouvislá množina, která má Lebesgueovu míru 0 (součet délek vypouštěných intervalů je totiž 1). Jako topologický prostor je homeomorfní s topologickým prostorem $\{0,1\}^P$ z předchozího příkladu.

## CVIČENÍ

Seznam je neúplný, další úlohy se budete dozvídat na cvičení. To platí i pro další cvičení v tomto textu.

**1.1.** Lze se v definici vnitřku, hranice, uzávěru a vnějšku množiny omezit pouze na okolí, která jsou prvky báze? A systému generátorů?

**1.2.** Uvažujte situaci z Př. 1.13 a najděte uzávěr množiny $A \subseteq \{0,1\}^P$, tvořenou takovými ohodnoceními $e$, že $e(p) = 1$ právě pro jedno $p \in P$. Existuje teorie $T \subseteq \mathrm{Fml}$ taková, že $A$ je množinou jejích modelů?

**1.3.** Udělejte totéž pro množinu ohodnocení $e$ takových, že $e(p) = 1$ pro konečně mnoho $p \in P$.

**1.4.** Ukažte, že indukovaná topologie je opravdu topologie. Co lze říci o bázi indukované topologie?

**1.5.** Je-li $\tau$ Hausdorffova topologie, je každá silnější topologie rovněž Hausdorffova. Je-li topologický prostor s topologií $\tau$ souvislý, je souvislý i s každou slabší topologií.

**1.6.** Které z uvedených topologických prostorů jsou Hausdorffovy? Které jsou separabilní? Které jsou souvislé?

**1.7.** Jestliže bod $x \in X$ leží v každé neprázdné otevřené množině, je $X$ separabilní.

**1.8.** Které z uvedených vlastností topologických prostorů platí i pro jejich podprostory, faktorprostory a součiny?

**1.9.** Ukažte, že pro dvě spojitá zobrazení $f, g : X \to Y$, kde $X$ je libovolný a $Y$ Hausdorffův prostor, je množina $A$ všech prvků $x \in X$ takových, že $f(x) = g(x)$, uzavřená v $X$. Nápověda: množina $A$ je vzor diagonály v $Y \times Y$ při jistém spojitém zobrazení.

**1.10.** Ukažte, že $\mathbf{R}$ a interval $(0, +\infty)$ jsou homeomorfní.

**1.11.** Ukažte, že v prostoru s topologií konečných doplňků je každá množina kompaktní.

**1.12.** Charakterizujte kompaktní množiny v $\mathbf{R}_{\mathrm{S}}$ a $\mathbf{R}_{\mathrm{lr}}$. (První úkol je obtížný, druhý méně.)

**1.13.** Mějme otevřenou množinu $W \subseteq X \times Y$. Pro množinu $B \subseteq Y$ označme $W_B = \{x \in X \mid (x,y) \in W \text{ pro každé } y \in B\}$. Dokažte, že je-li množina $B$ kompaktní, je množina $W_B$ otevřená.

**1.14.** Každá shora spojitá funkce kompaktního prostoru do $\mathbf{R}$ nabývá největší hodnoty. Dokažte.

# Kapitola 2

# Vybrané aplikace obecné topologie

## 2.1 Booleovy algebry

*Booleova algebra* $B$ je množina $B$ spolu s binárními operacemi $\wedge$ (průsek), $\vee$ (spojení), unární operací $'$ (komplement) a vybranými prvky $0, 1 \in B$ takovými, že

1. $B$ spolu s operacemi $\wedge$ a $\vee$ je distributivní svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1.

2. Pro každé $b \in B$ platí $b \wedge b' = 0$ a $b \vee b' = 1$.

Na Booleových algebrách zavádíme uspořádání $\leq$, jak je zvykem u svazů. Booleova algebra se nazývá *úplná*, je-li úplná jakožto svaz.

Na $B$ zavádíme dodatečnou binární operaci $\to$ (reziduum) takto:

$$a \to b = a' \vee b.$$

Booleovy algebry splňují

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', \qquad (a \vee b)' = a' \wedge b', \qquad a'' = a.$$

(De Morganova pravidla a pravidlo dvojího komplementu.)

*Filtr* v Booleově algebře $B$ je množina $F \subseteq B$ taková, že

1. $1 \in F, 0 \notin F$,

2. jestliže $a \in F$ a $b \geq a$, pak $b \in F$,

3. jestliže $a, b \in F$, pak $a \wedge b \in F$.

Pro libovolný filtr $F \subseteq B$ existuje Booleova algebra $\bar{B}$ a homomorfismus $h\colon B \to \bar{B}$ tak, že $F = h^{-1}(1)$. Naopak, pro libovolný homomorfismus Booleových algeber $h\colon B \to \bar{B}$ je množina $h^{-1}(1) \in B$ filtr.

*Ultrafiltr* je maximální filtr ve smyslu množinové inkluze. Ultrafiltrům odpovídají homomorfismy $h\colon B \to \mathbf{2}$, kde $\mathbf{2}$ je Booleova algebra $\{0,1\}$.

*Atom* v Booleově algebře $B$ je takový prvek $a$, pro který z $b < a$ plyne $b = 0$. Booleova algebra $B$ se nazývá *atomická*, když každý prvek $B$ je supremem nějaké množiny atomů.

**Příklad 2.1.** Výchozí Booleova algebra je Booleova algebra $2^X$ všech podmnožin nějaké množiny $X$ s operacemi průniku, sjednocení a doplňku. Tato Booleova algebra je úplná a atomická, jak se lze snadno přesvědčit.

**Příklad 2.2.** Obecnějším příkladem Booleovy algebry je libovolný systém $B \subseteq 2^X$, uzavřený na konečné průniky, sjednocení a doplňky. Takovému systému se říká *pole množin* (*field of sets*).

V dalších dvou příkladech ukážeme, že existují Booleovy algebry, které nejsou úplné a atomické. Tím bude dokázáno, že ne každá Booleova algebra je izomorfní Booleově algebře všech podmnožin nějaké množiny.

**Příklad 2.3.** Pro nekonečnou množinu $P$ položme $B \subseteq 2^X$ rovno množině všech konečných podmnožin $P$ a jejich doplňků. $B$ společně s operacemi průniku, sjednocení a doplňku je Booleova algebra, která je atomická (jednoprvkové množiny jsou atomy), ale není úplná.

**Příklad 2.4.** Faktorizací množiny Fml (viz výše) podle syntaktické ekvivalence dostaneme Booleovu algebru, známou pod názvem *Lindenbaumova algebra* (pro prázdnou teorii). Tato Booleova algebra není atomická, protože k libovolné třídě formulí $[\varphi] \neq 0$ (nenulovost znamená, že $\varphi$ není kontradikce) nalezneme nenulovou, ostře menší třídu $[\varphi \wedge p]$, kde $p$ je proměnná, neobsažená ve formuli $\varphi$. Lze snadno dokázat, že také není úplná.

Vidíme, že ne každá Booleova algebra je tvaru popsaném v Př. 2.1. Jak je to s obecnějším Příkladem 2.2?

## 2.2 Stoneův teorém o reprezentaci Booleových algeber

Ještě jeden příklad Booleovy algebry, tentokrát topologický.

**Příklad 2.5.** Položme $B$ rovno množině všech obojetných (tj. současně otevřených i uzavřených) množin v topologickém prostoru $X$. $B$ je pole množin, a tedy Booleova algebra.

Označme Booleovu algebru $B$ z předchozího příkladu symbolem $\mathrm{B}X$

Pro Booleovu algebru $B$ označme $\mathrm{S}B$ množinu všech ultrafiltrů v $B$. Víme, že ultrafiltry odpovídají homomorfismům $B \to \mathbf{2}$. $\mathrm{S}B$ je tedy v bijekci s množinou $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2})$. Uvažme na $\mathbf{2}$ diskrétní topologii a $\mathbf{2}^B$ s topologií součinu. Máme $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2}) \subseteq \mathbf{2}^B$. Zaveďme na $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2})$ (a potažmo na $\mathrm{S}B$) indukovanou topologii.

Prozkoumejme základní vlastnosti topologického prostoru $\mathrm{S}B$. Tento prostor je Hausdorffův, protože $\mathbf{2}^B$ je Hausdorffův, a je totálně nesouvislý, protože $\mathbf{2}^B$ je totálně nesouvislý (tyto vlastnosti se „dědí“ z prostoru na podprostor). Topologický prostor $\mathbf{2}^B$ je podle Tichonovovy věty kompaktní. Pokud dokážeme, že $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2})$ je jeho uzavřená podmnožina, budeme mít dokázáno, že $\mathrm{S}B$ je kompaktní (Věta 1.14).

**Lemma 2.1.** *Množina* $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2}) \subseteq \mathbf{2}^B$ *je uzavřená.*

*Důkaz.* Postupuje se tak, že se ukáže, že $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2})$ je průnikem uzavřených množin. Aby zobrazení $h \in \mathbf{2}^B$ leželo v $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2})$, musí splňovat podmínky pro homomorfismus Booleových algeber, tedy

$$\begin{aligned} h(0) &= 0, & h(1) &= 1, \\ h(a \wedge b) &= h(a) \wedge h(b), & h(a \vee b) &= h(a) \vee h(b), \\ h(a') &= h(a)' \end{aligned}$$

pro každé $a, b \in B$. Označíme-li pro $a \in B$ symbolem $\pi_a$ projekci $\mathbf{2}^B \to \mathbf{2}$ příslušnou prvku $a$, tj. $\pi_a(h) = h(a)$, můžeme uvedené podmínky přepsat takto:

$$\begin{aligned} \pi_0(h) &= 0, & \pi_1(h) &= 1, \\ \pi_{a\wedge b}(h) &= \pi_a(h) \wedge \pi_b(h), & \pi_{a\vee b}(h) &= \pi_a(h) \vee \pi_b(h), \\ \pi_{a'}(h) &= \pi_a(h)'. \end{aligned}$$

Tím máme vymezenu množinu $\mathrm{Hom}(B,\mathbf{2})$ jako množinu prvků $\mathbf{2}^B$, která splňuje tyto podmínky. Podívejme se na některé z těchto podmínek a ukažme, že každá vymezuje uzavřenou množinu. Např. podmínka $\pi_0(h) = 0$ říká, že $h \in \pi_0^{-1}(0)$. Protože množina $\{0\}$ je uzavřená v $\mathbf{2}$ (jako každá množina, protože na $\mathbf{2}$ máme diskrétní topologii) a projekce $\pi_0$ je spojitá, je množina $\pi_0^{-1}(0)$ uzavřená.

Zkusme se ještě podívat na poslední podmínku (ostatní vynecháme, ale ověřují se podobně). Na levé straně máme obraz bodu $h$ při spojitém zobrazení $\pi_{a'}$, na pravé jeho obraz při kompozici dvou spojitých zobrazení (projekci $\pi_a$ a komplementace v $\mathbf{2}$). Množina bodů, ve kterých se tato zobrazení rovnají, je uzavřená (Cv. 1.9) pro každé $a$. □

Prostor $\mathrm{S}X$ je tedy kompaktní, Hausdorffův a totálně nesouvislý. Takové topologické prostory se nazývají *Stoneovy*.

**Věta 2.1** (Stoneova o reprezentaci Booleových algeber)**.** *Pro libovolnou Booleovu algebru $B$ je Booleova algebra* $\mathrm{BS}\,B$ *izomorfní s $B$. Pro libovolný Stoneův topologický prostor $X$ je topologický prostor* $\mathrm{SB}\,X$ *homeomorfní s $X$.*

Mějme homomorfismus Booleových algeber $h\colon B_1 \to B_2$ a definujme zobrazení $\mathrm{S}\,h\colon \mathrm{S}\,B_2 \to \mathrm{S}\,B_1$ předpisem

$$\mathrm{S}\,h(F) = h^{-1}(F).$$

Toto zobrazení lze ekvivalentně definovat pomocí reprezentace ultrafiltrů homomorfismy z Booleovy algebry do $\mathbf{2}$. Je-li $h_F : B \to \mathbf{2}$ homomorfismus odpovídající ultrafiltru $F \subseteq B$, platí

$$h_{\mathrm{S}\,h(F)} = h_F \circ h.$$

Pro spojité zobrazení $f\colon X_1 \to X_2$ a obojetnou množinu $U \subseteq X_2$ označme

$$\mathrm{B}\,f(U) = f^{-1}(U).$$

Množina $\mathrm{B}\,f(U)$ je rovněž obojetná (jakožto spojitý vzor současně uzavřené i otevřené množiny), takže dostáváme zobrazení $\mathrm{B}\,f\colon \mathrm{B}\,X_2 \to \mathrm{B}\,X_1$.

**Věta 2.2** (Stoneova dualita)**.** *Zobrazení* $\mathrm{S}\,h$ *je spojité a platí* $\mathrm{BS}\,h = h$*. Zobrazení* $\mathrm{B}\,f$ *je homomorfismus a pokud jsou prostory $X_1$ a $X_2$ Stoneovy, platí* $\mathrm{SB}\,f = f$*. Pro dva homomorfismy $h_1 : B_1 \to B_2$ a $h_2 : B_2 \to B_3$ platí* $\mathrm{S}(h_2 \circ h_1) = \mathrm{S}\,h_1 \circ \mathrm{S}\,h_2$*. Pro dvě spojitá zobrazení $f_1 : X_1 \to X_2$ a $f_2 : X_2 \to X_3$ platí* $\mathrm{B}(f_2 \circ f_1) = \mathrm{B}\,f_1 \circ \mathrm{B}\,f_2$.

## 2.3 Topologie datových typů

Budeme pracovat s Sierpińského prostorem $\mathbf{S}$, jeho prvky přeznačíme na $\bot$ a $\top$. Otevřené množiny v $\mathbf{S}$ jsou tedy $\emptyset$, $\{\top\}$ a $\{\bot, \top\}$. Hodnota $\bot$ reprezentuje nekonečný výpočet: pokud funkce $f$ s parametrem $x$ cyklí, píšeme $f(x) = \bot$.

Ze čtyř možných funkcí $\mathbf{S} \to \mathbf{S}$ jsou tři spojité. Jsou to právě ty funkce, které jsou definovatelné v programovacím jazyce. (Uvažujeme typovaný funkcionální programovací jazyk s líným vyhodnocováním.) Funkce $f$ splňující $f(\top) = \bot$ a $f(\bot) = \top$ není definovatelná. Druhá podmínka totiž znamená, že funkce $f$ musí skončit i při vyhodnocování $f(g(x))$, kde výpočet $g(x)$ neskončí. Nesmí tedy svůj argument vyhodnocovat, což znamená, že musí být konstantní. To je v rozporu s první podmínkou. Ostatní tři funkce lze definovat snadno. Jsou totiž buď konstantní, nebo identické.

Označme množinu definovatelných funkcí z $X$ do $Y$ symbolem $X \to Y$.

Mějme datový typ $X$. Na $X$ definujeme systém $\sigma$ tvořený množinami definovatelnými funkcemi $X \to \mathbf{S}$ našeho jazyka. Pro funkci $f\colon X \to \mathbf{S}$ je příslušná množina

$U_f$ definována jako množina všech $x \in X$, pro která $f(x) = \top$. Opačně, pro takto definovanou množinu $U$ značíme příslušnou funkci $\chi_U$ (charakteristická funkce množiny $U$). Systém $\sigma$ je báze topologie na $X$ (*topologie definovatelných množin*).

Důvodem, proč $\sigma$ nemusí být topologie, je, že libovolné sjednocení množin ze $\sigma$ nemusí být prvkem $\sigma$. Abychom to opravili, dodáme do našeho jazyka binární operaci $\vee$ na $\mathbf{S}$, splňující $\top \vee \top = \top \vee \bot = \bot \vee \top = \top$, $\bot \vee \bot = \bot$ (operaci lze implementovat pomocí paralelního spuštění výpočtu obou operandů). Připustíme i možnost paralelního spuštění nekonečně mnoha programů.

U každého datového typu předpokládáme existenci prvku $\bot$. Aniž bychom to explicitně zmínili, často ale pracujeme s podmnožinami datových typů (a tedy jejich topologickými prostory), zejména takovými, které tento prvek neobsahují. Obecně podprostorům datových typů říkáme *prostor*.

**Příklad 2.6.** Každá definovatelná funkce z $X$ do $Y$ je spojitá.

Naše topologie má tedy spočetnou bázi. Pro důkaz Věty 2.3 (a obecně asi i jinde) je třeba mít tuto bázi uspořádanou do posloupnosti. Budeme tedy předpokládat, že ji máme k dispozici jako definovatelnou funkci $\texttt{basis}_X : \mathbf{N} \to (X \to \mathbf{S})$.

**Příklad 2.7.** V případě reálných čísel a Cantorova prostoru tato definovatelná funkce opravdu existuje.

V dalším budeme předpokládat, že každý datový typ je jako topologický prostor *lokálně kompaktní*, což znamená, že ke každému bodu $x$ a okolí $U \ni x$ existuje okolí $V \ni x$ a kompaktní množina $B$ tak, že $V \subseteq B \subseteq U$.

**Příklad 2.8.** Topologický prostor $\mathbf{R}$ je lokálně kompaktní, Cantorův prostor také.

**Příklad 2.9.** V Hausdorffových prostorech lze podmínku lokální kompaktnosti zformulovat takto: pro každé $x \in X$ existuje okolí $U \ni x$, jehož uzávěr je kompaktní.

Dále budeme předpokládat, že pokud pro spojitou funkci $f : X \to \mathbf{S}$ a bod $x \in X$ platí $f(x) = \top$, pak při programovém zjišťování hodnoty $f(x)$ získáme i otevřenou množinu $V$ takovou, že, že $x \in V \subseteq U_f$.

**Příklad 2.10.** Na Cantorově prostoru je tato podmínka jednoduše splněna. Ohledně reálných čísel viz níže.

Pro libovolné typy $Y$ a $Z$ je funkce $\texttt{apply} : (Y \to Z) \times Z \to Y$, daná předpisem $\texttt{apply}(f, z) = f(z)$, definovatelná. To lze chápat jako základní předpokládaný rys našeho jazyka.

Dalším předpokládaným rysem jazyka je, že pro definovatelnou funkci $g : X \times Y \to Z$ existuje právě jedna definovatelná funkce $\texttt{curry}_g : X \to (Y \to Z)$ taková, že pro každé $x \in X$, $y \in Y$ máme

$$g(x,y) = \texttt{apply}(\texttt{curry}_g(x), y).$$

Pro typ $Y$ a množinu $A \subseteq Y$ označme $\forall_A$ funkci $(Y \to \mathbf{S}) \to \mathbf{S}$ takovou, že pro $f \in (Y \to \mathbf{S})$ je $\forall_A(f) = \top$, právě když pro každé $y \in A$ platí $f(y) = \top$.

**Věta 2.3.** *Je-li množina $A$ kompaktní, je funkce $\forall_A$ definovatelná.*

*Důkaz.* Následující výpočet skončí právě když pro každé $x \in A$ platí $f(x) = \top$:

1: $\sigma \leftarrow \emptyset$
2: $n \leftarrow 0$
3: **while** $A \setminus \bigcup \sigma \neq \emptyset$ **do**
4: $\quad n \leftarrow$ the least number $m > n$ such that $U_m \cap (A \setminus \bigcup \sigma) \neq \emptyset$
5: $\quad x \leftarrow$ any element of $U_n \cap (A \setminus \bigcup \sigma)$
6: $\quad V \leftarrow$ the open set induced by evaluation of $f(x)$
7: $\quad$ **if** $U_n \subseteq V$ **then**
8: $\quad\quad$ add $U_n$ to $\sigma$
9: $\quad$ **end if**
10: **end while**

Poznámky:

- Symbol $U_m$ na ř. 4 ($U_n$ na dalších) označuje $m$-tou množinu báze na $X$. Tedy, $U_m = \texttt{basis}_X(m)$.
- Množina $V$ na ř. 6 je otevřená množina získaná během výpočtu hodnoty $f(x)$ (viz výše).
- Pokud pro každé $x \in A$ platí $f(x) = \top$, číslo $m$ na ř. 4 vždy existuje. Kdyby neexistovalo, znamenalo by to, že pro bod $x \in U_n \cap (A \setminus \bigcup \sigma)$ jsme v předešlých iteracích (na ř. 7) prošli všechny prvky báze, obsahující $x$. Tedy žádný prvek $U$ báze nesplňuje $f(U) = \top$. To je ve sporu s předpokladem $f(x) = \top$.
- Proč výpočet skončí? Ať už by skončil, nebo ne, množiny vybrané do $\sigma$ tvoří pokrytí množiny $A$ (viz předchozí bod). Jelikož $A$ je kompaktní, lze z něj vybrat konečné podpokrytí, takže po konečném počtu kroků nebude podmínka na ř. 3 splněna.
- Množinové operace a relace, které používáme, jsou všechny definovatelné, protože je aplikujeme pouze na prvky báze a množinu $A$. V obou případech strukturu množin známe (v bázi jsou např. intervaly v $\mathbf{R}$).

– Úplný důkaz by samozřejmě vyžadoval přepsat výpočet do našeho funkcionálního jazyka. □

Velký kvantifikátor tedy může pomoci rozpoznat některé množiny v $Y \to \mathbf{S}$. Pro libovolnou kompaktní množinu $A$ v $Y$ je množina $U_A$ všech $f \in (Y \to \mathbf{S})$ takových, že $f(x) = \top$ pro každé $x \in A$, definovatelná. Množiny $U_A$ tvoří bázi topologie na $Y \to \mathbf{S}$. Množinu $Y \to \mathbf{S}$ budeme vždy uvažovat s touto topologií. Složité topologické úvahy a Scottova teze (viz níže) ukazují, že je to právě topologie definovatelných množin.

**Věta 2.4.** *Je-li funkce $\forall_A$ spojitá, je množina $A$ kompaktní.*

*Důkaz.* Hezké cvičení. Náznak důkazu: množina $W$ v $Y \to \mathbf{S}$ definovaná funkcí $\forall_A$ je otevřená. Je tedy sjednocením množin $U_{A_\iota}$ ($\iota \in I$), kde $A_\iota$ jsou kompaktní. Každá otevřená množina v $Y$ obsahující celé $A$ obsahuje i některou z množin $A_\iota$. Uvažme otevřené pokrytí $\sigma$ množiny $A$. Máme $\bigcup \sigma \supseteq A$, takže pro nějaké $\iota \in I$ platí $A_\iota \subseteq \bigcup \sigma$. Zbytek plyne z kompaktnosti $A_\iota$. □

**Příklad 2.11.** Na cvičení jste viděli implementaci funkce $\forall_X$ pro $X$ rovno Cantorovu prostoru. Tato implementace je novým důkazem už známého faktu, že Cantorův prostor je kompaktní.

Teď se podívejme na definovatelné množiny na kartézském součinu typů $X \times Y$. První postřeh je snadný:

**Příklad 2.12.** Topologie součinu na $X \times Y$ je slabší než topologie definovatelných množin.

Další úvahy začneme zkoumáním topologie definovatelných množin na $(Y \to \mathbf{S}) \times Y$. Zobrazení `apply` definuje množinu $\{(f,y) \mid f(y) = \top\}$. Tato množina tedy musí být v topologii definovatelných množin otevřená. Jak ovšem ukazuje následující věta, je otevřená už v topologii součinu.

**Věta 2.5.** *Množina $\{(f,y) \mid f(y) = \top\}$ je otevřená v topologii součinu na $(Y \to \mathbf{S}) \times Y$.*

*Důkaz.* Zvolme $f \in (Y \to \mathbf{S})$ a $y \in Y$ takové, že $f(y) = \top$. Funkce $i\colon Y \to (Y \to \mathbf{S}) \times Y$, $i(y') = (f,y')$ je jistě definovatelná, musí tedy být spojitá. Vzor množiny $\{(f,y) \mid f(y) = \top\}$ při této funkci je tedy otevřená množina v $Y$. Označme ji $U$. Je to množina všech $y' \in Y$ takových, že $f(y') = \top$. Zvolme okolí $V \ni y$ a kompaktní množinu $A$ tak, že $V \subseteq A \subseteq U$ (lze díky lokální kompaktnosti). Podle definice topologie na $Y \to \mathbf{S}$ je množina $F$ všech funkcí $g$ v $Y \to \mathbf{S}$ takových, že $g(y') = \top$ pro každé $y' \in A$, otevřená. Teď už zbývá zkontrolovat, že $V \times F \subseteq \{(f,y) \mid f(y) = \top\}$. □

Jednoduchá úvaha (všechny netriviální funkce z $(Y \to \mathbf{S}) \times Y$ do $\mathbf{S}$ využívají funkci `apply`) nás dovede k tomu, že topologie definovatelných množin v $(Y \to \mathbf{S}) \times Y$ je právě topologie součinu.

Obdobně jako výše můžeme zavést i topologii na množině $(Y \to Z)$. K tomu lze využít následující.

- Funkce `apply`: $(Y \to Z) \times Y \to Z$ je definovatelná, musí tedy být spojitá.
- Pro libovolnou funkci $f \in (Y \to Z)$, otevřenou množinu $W \subseteq Z$ a kompaktní množinu $B \subseteq Y$ lze pomocí predikátu $\forall_B$ (částečně) rozhodnout, zda pro každé $y \in B$ platí $f(y) \in W$. Toho lze využít k zavedení báze topologie na $Y \to Z$.

Pomocí vlastností funkce `apply` a $\mathtt{curry}_g$ uvedených výše lze nyní odvodit, že topologie definovatelných množin na $X \times Y$ je právě topologie součinu.

V dalším budeme předpokládat následující *Scottovu tezi*: *Každá spojitá funkce je definovatelná*. Její splnění lze docílit volbou vhodného jazyka a třídy datových typů.

## 2.4 Reprezentace reálných čísel

Uvažujme pro jednoduchost pouze reálná čísla z intervalu $[0,1]$. Jsou to právě ta čísla, která v desetinném (i dvojkovém) rozvoji mají před desetinnou čárkou nulu. (Jedničku lze napsat jako $0.9999\ldots$.) Později to bude interval $[-1,1]$.

Vraťme se k následující požadované vlastnosti datových typů: pokud pro spojitou funkci $f\colon X \to \mathbf{S}$ a bod $x \in X$ platí $f(x) = \top$, pak při programovém zjišťování hodnoty $f(x)$ získáme i otevřenou množinu $V$ a kompaktní množinu $B$ takové, že $x \in V \subseteq B \subseteq U_f$.

**Příklad 2.13.** Tento požadavek není splněn, pokud reálná čísla reprezentujeme naivně jako posloupnosti číslic.

V následujících příkladech uvedeme dvě různé reprezentace reálných čísel, které uvedený požadavek splňují.

**Příklad 2.14.** Libovolné $x \in [0,1]$ lze reprezentovat množinou všech otevřených intervalů $(a,b)$, kde $a,b \in \mathbf{Q}$ a $a < x < b$.

**Příklad 2.15.** Každé reálné číslo $x \in [-1,1]$ lze reprezentovat posloupností čísel $c_i \in \{-1,0,1\}$ ($i \in \mathbf{N}$) tak, že $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot 2^{-i}$.

**Příklad 2.16.** Tyto dvě reprezentace opravdu splňují výše uvedenou podmínku.

## 2.5 Výpočetní důkazy některých topologických tvrzení

Následující tvrzení lze dokázat vytvořením vhodného programu.

**Příklad 2.17.** Každá uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní.

**Příklad 2.18.** V Hausdorffově prostoru jsou kompaktní množiny uzavřené.

**Příklad 2.19.** Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.

**Příklad 2.20.** Součin dvou kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

**Příklad 2.21.** Průnik kompaktního systému otevřených množin je otevřená množina.

V literatuře lze nalézt i výpočetní důkaz Tichonovova teorému pro spočetný systém topologických prostorů.

## 2.6 Rozhodnutelnost

Datový typ `Bool` je tvořen prvky `true`, `false` a $\perp$. Topologie definovatelných množin na `Bool` je $\{\emptyset, \{\texttt{true}\}, \{\texttt{false}\}, \texttt{Bool}\}$.

*Úplný (totální) predikát* na typu $X$ je spojitá funkce $p : X \to \texttt{Bool}$, taková, že $p(x) = \perp$ jedině pro $x = \perp$. Množina $U \subseteq X$ je *rozhodnutelná*, existuje-li úplný predikát $p$ takový, že $p(x) = \texttt{true}$ právě když $x \in U$.

**Příklad 2.22.** Využitím definovatelné funkce $g : \texttt{Bool} \to \mathbf{S}, g(\texttt{true}) = \top, g(\texttt{false}) = g(\perp) = \perp$ lze ukázat, že rozhodnutelné množiny jsou otevřené. Na prostoru $X \setminus \{\perp\}$ jsou obojetné.

**Příklad 2.23.** Z předchozího plyne, že na $\mathbf{R}$ neexistuje netriviální úplný predikát. ($\mathbf{R}$ je souvislý topologický prostor.)

**Příklad 2.24.** Relace rovnosti na $X$ je rozhodnutelná, právě když $X$ je diskrétní. To vede k poznatku, že i na některých nečekaných prostorech je rovnost rozhodnutelná.

**Příklad 2.25.** Je-li prostor $X$ kompaktní a $Y$ diskrétní, je prostor $X \to Y$ diskrétní. Na $X \to Y$ je tedy rozhodnutelná rovnost.

## 2.7 Specializační uspořádání na otevřených množinách

Topologické prostory, které nejsou Hausdorffovy, nemají mnohé obvyklé vlastnosti, známé z Hausdorffových prostorů. Například konečné nebo kompaktní množiny nemusí být uzavřené (což nás vedlo k opatrné formulaci podmínky lokální kompaktnosti výše). Na druhou stranu, u nehausdorffových prostorů se setkáváme s novými zajímavými jevy.

Pro dva prvky $x, y \in X$ píšeme $x \sqsubseteq y$, pokud $y$ leží v každém okolí prvku $x$.

**Příklad 2.26.** Ekvivalentně: $x \in \mathrm{cl}\{y\}$.

Relace $\sqsubseteq$ je reflexivní a tranzitivní, neboli kvaziuspořádání.

Topologický prostor $X$ je $\mathrm{T}_0$*-prostor* (nebo stručně $\mathrm{T}_0$), pokud pro každé dva různé body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý.

V $\mathrm{T}_0$-prostorech je relace $\sqsubseteq$ antisymetrická, a tedy je to uspořádání. Nazývá se *specializační (kvazi-)uspořádání*.

V dalším budeme předpokládat, že datové typy jsou $\mathrm{T}_0$ (rozumný požadavek na datový typ!). Relace $\sqsubseteq$ je tedy uspořádání.

Vzhledem k tomuto uspořádání jsou všechny otevřené množiny tzv. *horní množiny* (*upper sets*), tj. množiny, pro které $x \in U$ implikuje $y \in U$ pro každé $y \sqsupseteq x$.

**Příklad 2.27.** Pro datový typ $X$ je $\perp \in X$ nejmenším prvkem vzhledem ke specializačnímu uspořádání $\sqsubseteq$.

**Věta 2.6.** *Každá spojitá funkce $X \to Y$ je monotonní vzhledem ke specializačnímu uspořádání na $X$ a $Y$.*

## 2.8 Denotační sémantika

Jde o matematický model pro funkcionální programování. Každý výraz programu označuje nějaký matematický objekt. Např. výraz `2` označuje číslo 2. Píšeme $[\![\texttt{2}]\!] = 2$. Dále: $[\![\texttt{1 + 2}]\!] = [\![\texttt{1}]\!] + [\![\texttt{2}]\!] = \texttt{3}$. Výrazy s proměnnými označují matematický objekt v závislosti na prostředí.

Klíčové je přiřazení vhodného objektu rekurzivní funkci. Funkce obecně označují množiny uspořádaných dvojic $(x, f(x))$. Protože uvažujeme i částečné funkce, může se stát, že pro některá $x$ se nebude dvojice s prvním prvkem $x$ v množině vyskytovat (pro takový prvek $x$ se předpokládá zacyklení). V krajním případě může být funkce reprezentovaná prázdnou množinou (pokud nepřiřazuje ničemu nic). Tu značíme také $\perp$.

Množinu všech funkcí $X \to Y$ můžeme uspořádat podle inkluze. Toto uspořádání značíme $\sqsubseteq$.

Například u funkce faktoriál

```
fact n = if n == 0 then 1
         else n*fact(n - 1)
```

je $[\![\texttt{fact}]\!]$ rovno množině $\{(0,1),(1,1),(2,2),(3,6),(4,24),\ldots\}$. K ní se dojde následujícím způsobem. Nejprve uvážíme funkci

```
F f = \n -> if n == 0 then 1
            else n*f(n - 1)
```

(„`\n -> ...`“ je lambda-výraz ekvivalentní výrazu „`(lambda (n) ...)`“ v Lispu nebo Scheme).

Funkce `F` není rekurzivní, takže není problém ji reprezentovat (matematickou) funkcí $F = [\![\mathrm{F}]\!]$. Je $F\colon (\mathbf{N} \to \mathbf{N}) \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N})$. Položme

$$\begin{aligned}
f_0 &= \emptyset,\\
f_1 &= F(f_0) = \{(0,1)\},\\
f_2 &= F(f_1) = \{(0,1),(1,1)\},\\
f_3 &= F(f_2) = \{(0,1),(1,1),(2,2)\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Všechny funkce $f_i$ jsou (částečné) funkce z $\mathbf{N}$ do $\mathbf{N}$. Platí $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq \ldots$. V uspořádané množině částečných funkcí z $\mathbf{N}$ do $\mathbf{N}$ je nejmenší horní závorou (supremem) těchto funkcí hledaná funkce faktoriál.

Funkce faktoriál je také pevným bodem funkce $F$. Je-li $f$ faktoriál, platí $Ff = f$. Ze všech takových pevných bodů je pevným bodem nejmenším. (V našem případě jediným, ale obecně by to platit nemuselo.)

Jak známo, platí $f = YF$, kde $Y$ je *Y-kombinátor*, objevený Haskellem B. Currym.

Všimněme si, že v množině $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ obecně neexistují suprema libovolných dvojic prvků; např. pro dvě různé úplné funkce $f$ a $g$ supremum $f \vee g$ neexistuje, protože sjednocení těchto funkcí (chápaných jako množiny uspořádaných dvojic) není funkce. Podobně jako u příkladu s faktoriálem ale očekáváme, že existují *suprema rostoucích posloupností*. Odtud definice Scottovy domény.

*Scottova doména* je libovolná množina $X$ s uspořádáním $\sqsubseteq$ taková, že libovolná posloupnost $f_0, f_1, f_2, f_3 \ldots$ jejích prvků, která je monotonní (tj. $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq \ldots$), má supremum. Supremum vzhledem k uspořádání $\sqsubseteq$ značíme $\bigsqcup$.

Poznámka: obecněji se definiční podmínka Scottovy domény neuvádí pro posloupnosti, ale pro tzv. usměrněné množiny. Nám to ale stačí takto.

Na Scottově doméně zavádíme topologii následujícím způsobem. Množina $U \subseteq X$ je otevřená, právě když

1. je horní (upper set),
2. jestliže supremum monotonní posloupnosti leží v $U$, leží tam i některý její prvek.

Platí:

**Věta 2.7.** *Vzhledem k této topologii je uspořádání $\sqsubseteq$ přesně specializační uspořádání.*

Pro Scottovy domény tedy platí výsledky o specializačním uspořádání. Zejména každá spojitá funkce Scottových domén je monotonní. Navíc:

**Věta 2.8.** *Je-li $g$ spojitá funkce Scottových domén $X$ a $Y$, pak pro každou monotonní posloupnost $f_i$ v $X$ platí $g(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} f_i) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} g(f_i)$.*

A konečně:

**Věta 2.9.** *Otevřené množiny na $X$ jsou právě definovatelné množiny.*

Důležitá poznámka: v textu posledních kapitol není zcela rozlišeno, které prostory uvažujeme s prvkem $\perp$ a které ne. (Například u množiny $\mathbf{N}$.) Neměl jsem čas dát to do pořádku.

## CVIČENÍ

**2.1.** Booleova algebra $B$ je úplná, právě když je prostor $\mathrm{S}\,B$ extrémně nesouvislý.

**2.2.** Je-li relace $\neq$ na prostoru $X$ (chápaná jako funkce $X \times X \to \mathbf{S}$) definovatelná, je $X$ Hausdorffův. Dokažte.

**2.3.** Je-li relace $=$ na prostoru $X$ definovatelná, je $X$ diskrétní.

**2.4.** Ukažte, že pro libovolnou spojitou funkci $f\colon X \to Y$ je funkce, která přiřazuje otevřeným množinám $V \subseteq Y$ jejich vzory $f^{-1}(V)$ definovatelná.

**2.5.** Je funkce z předchozího příkladu spojitá vzhledem k topologiím na $Y \to \mathbf{S}$ a $X \to \mathbf{S}$?

**2.6.** Mějme množinu všech posloupností nul a jedniček, které mají na prvočíselných pozicích jedničky. Je definovatelná funkce, která pro každý úplný predikát rozhodne, zda je splněn pro všechny prvky této množiny?

**2.7.** Totéž pro množinu všech posloupností obsahujících konečný počet jedniček.

**2.8.** Ukažte, že na prostoru $(\mathbf{N} \to \texttt{Bool}) \to \texttt{Bool}$ je rozhodnutelná rovnost (tady uvažujeme $\mathbf{N}$ a `Bool` jako prostory bez prvku $\perp$).

**2.9.** Prvky Cantorova prostoru lze chápat jako (rekurzivní) funkce. Jsou tedy prvky nějaké Scottovy domény. Navrhněte její definici.

**2.10.** Totéž pro některou z uvedených reprezentací reálných čísel.

# Kapitola 3

# Základy algebraické topologie

## 3.1 Homotopická ekvivalence topologických prostorů

Spojitá zobrazení $f, g\colon X \to Y$ topologických prostorů $X$ a $Y$ se nazývají *homotopická*, jestliže existuje spojité zobrazení $F\colon X \times [0,1] \to Y$ takové, že $f(x) = F(x,0)$ a $g(x) = F(x,1)$. $F$ se nazývá *homotopie mezi $f$ a $g$*.

O topologických prostorech $X$ a $Y$ řekneme, že jsou *homotopicky ekvivalentní*, jestliže existují zobrazení $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ taková, že $g \circ f$ je homotopické s $\mathrm{id}_X$ a $f \circ g$ je homotopické s $\mathrm{id}_Y$.

Topologický prostor se nazývá *kontraktibilní*, je-li homotopicky ekvivalentní s bodem.

**Věta 3.1.** *Dva homeomorfní prostory jsou homotopicky ekvivalentní.*

**Příklad 3.1.** Libovolná dvě spojitá zobrazení $f, g\colon X \to \mathbf{R}^n$ jsou homotopická.

**Příklad 3.2.** $\mathbf{R}^n$ je tedy kontraktibilní.

**Příklad 3.3.** Zobrazení $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ není homotopické s konstantou.

Označme $\mathrm{S}^n$ podmnožinu $\mathbf{R}^{n+1}$ danou rovnicí $\|x\| = 1$ (eukleidovská norma). $\mathrm{S}^n$ se nazývá *n-rozměrná sféra*.

**Příklad 3.4.** $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ není kontraktibilní, je homotopicky ekvivalentní s $\mathrm{S}^{n-1}$.

Homotopická ekvivalence je užitečný typ ekvivalence topologických prostorů. Navíc, problém rozhodnout, zda dva prostory jsou homotopicky ekvivalentní, je (obvykle) rozhodnutelný. Narozdíl od problému homeomorfismu.

## 3.2 Oblouková souvislost, jednoduchá souvislost

*Oblouk mezi body $x$ a $y$* v topologickém prostoru $X$ je libovolné spojité zobrazení $\gamma\colon [0,1] \to X$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$.

Topologický prostor $X$ se nazývá *obloukově souvislý*, jestliže mezi libovolnými jeho dvěma body existuje oblouk. Množina v topologickém prostoru je obloukově souvislá, je-li souvislá jako topologický prostor s indukovanou topologií.

Každý topologický prostor se rozpadá na *obloukově souvislé komponenty*. Relace „mezi body $x$ a $y$ existuje oblouk“ je totiž ekvivalence.

**Věta 3.2.** *Každý obloukově souvislý topologický prostor je souvislý.*

*Důkaz.* Hezké cvičení. □

**Příklad 3.5.** Opak obecně neplatí, ale např. pro libovolné podmnožiny $\mathbf{R}$ a libovolné otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$ ano (to druhé není snadné dokázat).

**Příklad 3.6.** *Topologova sinusovka* je podmnožina $\mathbf{R}^2$, která je grafem funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Je příkladem souvislé množiny, která není obloukově souvislá.

**Příklad 3.7.** Topologický prostor $X$ je jednoduše souvislý, právě když v něm jsou libovolné dvě konstantní zobrazení $Y \to X$ homotopická.

Topologický prostor $X$ se nazývá *jednoduše souvislý*, je-li obloukově souvislý a jestliže libovolné spojité zobrazení $\mathrm{S}^1 \to X$ je homotopické s konstantou.

**Příklad 3.8.** Každý kontraktibilní topologický prostor je jednoduše souvislý.

## 3.3 Singulární homologie

*Standardní $k$-simplex* (nebo *simplex dimenze $k$*) je množina $\Delta_k \subseteq \mathbf{R}^k$, která je konvexním obalem $\langle P_0, P_1, \ldots, P_k \rangle$ bodů $P_0, P_1, \ldots, P_k$, kde

$$\begin{aligned} P_0 &= (0,0,\ldots,0), \\ P_i &= (0,\ldots,1,\ldots,0) \quad (1 \le i \le k,\ 1 \text{ na } i\text{-té pozici}). \end{aligned}$$

Body $P_0, P_1, \ldots, P_k$ jsou jeho *vrcholy*.

*Singulární $k$-simplex v topologickém prostoru $X$* je spojité zobrazení $\sigma\colon \Delta_k \to X$. Body $\sigma(P_0), \sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_k)$ se nazývají jeho *vrcholy*.

Označme $S_k(X)$ (aditivní) volnou abelovskou grupu nad singulárními $k$-simplexy v $X$. Prvky $S_k(X)$ se nazývají *singulární $k$-řetězce*. Jsou to formální lineární kombinace $\sum_j a_j\sigma_j$, kde $j$ probíhá nějakou konečnou indexovou množinu, $a_j \in \mathbf{Z}$ a $\sigma_j$ jsou singulární $k$-simplexy v $X$.

Pro formální lineární kombinace platí obvyklá pravidla:

$$\begin{aligned} 0\cdot\sigma &= 0 && \text{(napravo je nula grupy } S_k(X)\text{)},\\ a_1\sigma + a_2\sigma &= (a_1+a_2)\sigma,\\ a(b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2) &= (ab_1)\sigma_1 + (ab_2)\sigma_2. \end{aligned}$$

Klademe $S_\bullet(X) = \bigoplus_k S_k(X)$. Je to přímý součet abelovských grup, tedy prvky jsou formální součty konečně mnoha prvků z grup $S_k(X)$ pro různá $k$, tj. formálně totéž jako prvky jednoho $S_k(X)$.

Pro body $Q_0,\dots,Q_k \in \mathbf{R}^n$ existuje právě jedno afinní zobrazení

$$\sigma\colon \Delta_k \to \langle Q_0,\dots,Q_k\rangle$$

takové, že

$$\sigma(P_i) = Q_i \quad (i = 0,\dots,k).$$

Body $Q_0,\dots,Q_k$ takto definují singulární $k$-simplex v $\mathbf{R}^n$. Tento $k$-simplex se obvykle ztotožňuje s $\langle Q_0,\dots,Q_k\rangle$ (ale záleží na pořadí vrcholů). U takto definovaných $k$-simplexů budeme vždy předpokládat, že body $Q_0,\dots,Q_k$ jsou v obecné poloze.

Pro $i \in \{0,1,\dots,k\}$, *$i$-tá $(k-1)$-stěna standardního $k$-simplexu* $\Delta_k$ je singulární $(k-1)$-simplex $F_k^i = \langle Q_0,\dots,\hat{Q}_i,\dots,Q_k\rangle$ ($Q_i$ je vynecháno).

Nechť $k > 0$. Pro singulární $k$-simplex $\sigma$ v $X$ klademe

$$\partial_k\sigma = \sum_i (-1)^i \sigma\circ F_k^i.$$

a pro singulární $k$-řetězec $c \in S_k(X)$, $c = \sum_j a_j\sigma_j$, pak klademe

$$\partial_k c = \sum_j a_j\,\partial_k\sigma_j.$$

Pro $k = 0$ je

$$\partial_0 c = 0$$

pro libovolné $c \in S_0(X)$.

Singulární $(k-1)$-řetězec $\partial_k c$ se nazývá *okraj $k$-řetězce $c$*. Zobrazení $\partial_k\colon S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ je homomorfismus abelovských grup. Tím také vzniká homomorfismus $\partial\colon S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$.

Položme

$$Z_k(X) = \operatorname{Ker} \partial_k, \qquad B_k(X) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}.$$

Prvky $Z_k(X)$ jsou $k$-řetězce s nulovým okrajem. Nazývají se *$k$-cykly*. Prvky $B_k(X)$ jsou $k$-řetězce vzniklé aplikací zobrazení $\partial_{k+1}$ na nějaký $(k+1)$-řetězec. Nazývají se *$k$-okraje*.

**Věta 3.3.** $\partial \circ \partial = 0$.

(Neboli: $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.) Věta říká, že *každý okraj je cyklus*. Grupa $B_k(X)$ je tedy podgrupou grupy $Z_k(X)$. Označme $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$. Grupa $H_k(X)$ se nazývá *$k$-tá (singulární) homologická grupa prostoru $X$*.

**Věta 3.4.** *Homotopicky ekvivalentní topologické prostory mají izomorfní homologické grupy.*

**Věta 3.5.** *Jsou-li $X_j$ obloukově souvislé komponenty $X$, pak $H_k(X)$ je izomorfní přímému součtu $\bigoplus_j H_k(X_j)$.*

**Věta 3.6.** *Je-li $X$ obloukově souvislý, pak $H_0(X)$ je izomorfní $\mathbf{Z}$. Je-li kontraktibilní, pak pro $k > 0$ je $H_k(X)$ triviální.*

## 3.4 Přesné posloupnosti Z-modulů

Pro $n \geq 0$ máme pro grupu $\mathbf{Z}^n$ zobrazení $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^n$, které číslu $k$ a prvku $a \in \mathbf{Z}^n$ přiřadí násobek $k \cdot a$. Grupa $\mathbf{Z}^n$ společně s tímto zobrazením splňuje formálně všechny podmínky pro vektorový prostor ($\mathbf{Z}$ ovšem není těleso, takže to vektorový prostor není) a nazývá se *$\mathbf{Z}$-modul*.

Mnohé poznatky pro vektorové prostory platí i pro $\mathbf{Z}$-moduly. Pro nás je důležitá *dimenze* $\mathbf{Z}$-modulů a jejich podprostorů. Pro homomorfismus $f : M \to N$ $\mathbf{Z}$-modulů $M$ a $N$ platí (podobně jako u vektorových prostorů)

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim M.$$

Mějme (konečnou nebo nekonečnou) posloupnost $\mathbf{Z}$-modulů $M_i$ společně s homomorfismy $f_i$:

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

Tato posloupnost se nazývá *přesná*, pokud pro každé $i$ (pro které to má smysl) je $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$.

Pokud má posloupnost první (resp. poslední) prvek, obvykle se pokládá roven $\mathbf{Z}^0$ (značení: 0).

**Příklad 3.9.** Například toto je tzv. *krátká přesná posloupnost*:

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0.$$

Z přesnosti této posloupnosti plyne, že $f_0$ je injekce, $f_1$ surjekce a $M_2$ je izomorfní faktorprostoru $M_1/f_0(M_0)$.

**Příklad 3.10.** Ještě kratší než krátká přesná posloupnost je tato:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Zde jsou prostory $M$ a $N$ izomorfní.

## 3.5 Dlouhá Mayerova-Vietorisova posloupnost

Nechť $X$ je topologický prostor $U, V$ otevřené množiny v $X$, $X = U \cup V$. Označme $U \cap V = W$.

**Věta 3.7** (dlouhá Mayerova-Vietorisova posloupnost)**.** *Existuje přesná posloupnost*

$$\begin{aligned}\cdots \to & H_2(W) \to H_2(U) \oplus H_2(V) \to H_2(X) \to \\ \to & H_1(W) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(X) \to \\ \to & H_0(W) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0.\end{aligned}$$

Aniž víme přesně, jak jsou homomorfismy v této posloupnosti zkonstruovány, můžeme z ní vypočítat homologické grupy různých topologických prostorů (s použitím vět 3.5, 3.6).

**Příklad 3.11.** Vypočítáme homologické grupy prostoru $X = S^1$ (kružnice). Pokryjeme $S^1$ otevřenými množinami $U$ a $V$ takovými, že $U$ i $V$ je homeomorfní přímce a $W$ $(= U \cap V)$ je homeomorfní disjunktnímu sjednocení dvou přímek. Podle věty 3.6 je $H_0(X)$ izomorfní $\mathbf{Z}$. Podle vět 3.5 a 3.6 tedy můžeme Mayerovu-Vietorisovu posloupnost doplnit takto:

$$\begin{aligned}\cdots \xrightarrow{f_9} 0 \xrightarrow{f_8} 0 \xrightarrow{f_7} H_2(X) \xrightarrow{f_6} \\ \xrightarrow{f_6} 0 \xrightarrow{f_5} 0 \xrightarrow{f_4} H_1(X) \xrightarrow{f_3} \\ \xrightarrow{f_3} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{f_2} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbf{Z} \xrightarrow{f_0} 0.\end{aligned}$$

Máme $\operatorname{Ker} f_0 = \mathbf{Z}$, takže $\operatorname{Im} f_1 = \mathbf{Z}$. Dimenze $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Im} f_2$ je tedy 1. Tedy, $\dim \operatorname{Ker} f_2 = \dim \operatorname{Im} f_3 = 1$. Jelikož $\dim \operatorname{Im} f_4 = 0$, musí být $f_3$ injektivní, pročež $H_1(X)$ je izomorfní $\mathbf{Z}$. Posloupnost $0 \to H_2(X) \to 0$ říká, že $H_2(X) = 0$ a podobně pro vyšší homologické grupy.

## 3.6 Simpliciální komplexy, simpliciální homologie

*Simpliciální komplex $K$ v $\mathbb{R}^n$* je množina singulárních simplexů $\sigma = \langle Q_0, \dots, Q_l \rangle$ v $\mathbb{R}^n$, kde body $Q_0, \dots, Q_l$ jsou vždy v obecné poloze, taková, že

- pokud $\sigma \in K$, pak každá jeho stěna leží v $K$,
- pro $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ průnik $\sigma_1 \cap \sigma_2$ je buď prázdný, nebo je společnou stěnou.

Pro $k$ rovno největší dimenzi prvků z $K$ se $K$ nazývá *simpliciální $k$-komplex*. $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina bodů z $K$ ($|K| = \bigcup K$). Nazývá se *nosič simpliciálního komplexu $K$*. Množinu vrcholů simpliciálního komplexu $K$ (tj. vrcholů jeho simplexů) značíme $\operatorname{Vert} K$.

*Simpliciální zobrazení* simpliciálních komplexů $K_1$ a $K_2$ je zobrazení $f\colon \operatorname{Vert} K_1 \to \operatorname{Vert} K_2$ takové, že je-li $\langle Q_0, \dots, Q_l \rangle$ simplex v $K_1$, pak $\langle f(Q_0), \dots, f(Q_l) \rangle$ je simplex v $K_2$. Značíme $f\colon K_1 \to K_2$. Zobrazení $f$ lze přirozeně rozšířit na celou množinu $|K_1|$ (tj. nosič simpliciálního komplexu $K_1$): je-li totiž bod $P$ prvkem simplexu $\langle Q_0, \dots, Q_l \rangle$, lze jej jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci jeho vrcholů, $P = p_0 Q_0 + \dots + p_l Q_l$, $p_0 + \dots + p_l = 1$. Klademe $f(P) = p_0 f(Q_0) + \dots + p_l f(Q_l)$.

Simpliciální zobrazení $f\colon K_1 \to K_2$ je *nekolabující*, pokud pro každý simplex $\sigma \in K_1$ má simplex $f(\sigma) \in K_2$ stejnou dimenzi jako $\sigma$.

*Obarvení simpliciálního komplexu $K$* je nekolabující simpliciální zobrazení $\chi\colon K \to L$, kde $L$ je simplex. (Tj. $L$ je simpliciální komplex s jedním maximálním simplexem.) Srozumitelnější verze definice: je to zobrazení z $\operatorname{Vert} K$ do nějaké množiny $M$ takové, že obrazy libovolných dvou sousedních vrcholů v $K$ jsou různé. *Obarvený simpliciální komplex* je simpliciální komplex spolu s nějakým obarvením. V případě potřeby značíme simplicální komplex $K$ s obarvením $\chi$ jako dvojici $(K, \chi)$.

Řekneme, že simpliciální zobrazení $f$ obarvených simpliciálních komplexů $(K_1, \chi_1)$ a $(K_2, \chi_2)$ *zachovává obarvení* (je *chromatické*), jestliže $\chi_2 \circ f = \chi_1$ (tj. obarvení obrazu libovolného vrcholu $Q$ je rovno obarvení vrcholu $Q$).

Buď $Q_\bullet(K)$ volná abelovská grupa nad $K$. Je $Q_\bullet(K) \subseteq Q_\bullet(|K|)$, operátor $\partial$ lze zúžit na $Q_\bullet(K)$. Vznikají tedy homologické grupy $H_k(K)$, nazývané *simpliciální homologické grupy*.

**Věta 3.8.** *Grupy $H_k(K)$ a $H_k(|K|)$ jsou izomorfní.*

Pro topologický prostor $X$ se homeomorfismus $f\colon |K| \to X$ nazývá *triangulace prostoru $X$*. $X$ má pak stejné (izomorfní) homologické grupy jako $|K|$. Podle předchozí věty tedy platí, že pokud nalezneme triangulaci prostoru $X$, můžeme homologické grupy $X$ vypočítat jako simpliciální homologické grupy.

*Abstraktní simpliciální komplex $K$ nad množinou $M = \{m_1, \dots, m_r\}$* je systém podmnožin množiny $M$, který je uzavřený na podmnožiny a pokrývá $M$.

Abstraktní simpliciální komplexy jsou ekvivalentní simpliciálním komplexům (důkaz zprava doleva je triviální, zleva doprava obtížnější). Výpočet homologií je diskrétní problém; existují algoritmy i softwarové balíky.

*Rozdělením simpliciálního komplexu $K$* nazýváme simpliciální komplex $K'$ takový, že

– každý simplex z $K'$ leží v nějakém simplexu z $K$,

– každý simplex z $K$ je sjednocením konečně mnoha simplexů z $K'$.

Speciálním případem je *barycentrické rozdělení*, kde pro každý simplex v $K$ je k vrcholům přidáno jeho těžiště.

Je-li $K'$ rozdělení sipliciálního komplexu $K$, existuje ke každému simplexu $\sigma \in K'$ právě jeden minimální simplex v $K$, který ho obsahuje. Tento simplex se nazývá *nosný simplex simplexu $\sigma$ v $K$* a značí $\mathrm{carrier}(\sigma, K)$.

*Barevné* (*chromatické*) *rozdělení obarveného simpliciálního komplexu* $(K, \chi)$, $\chi\colon K \to L$, definujeme jako obarvený simpliciální komplex $(K', \chi')$, kde $K'$ je rozdělení $K$ a $\chi'\colon K' \to L$ splňuje, že pro každý vrchol $Q$ komplexu $K'$ je $\chi'(Q)$ rovno $\chi(P)$ pro nějaký vrchol $P$ nosného simplexu $\mathrm{carrier}(Q, K)$. (Tedy barva nového vrcholu je jednou z barev vrcholů starého simplexu, ve kterém nový simplex leží.)

## CVIČENÍ

**3.1.** Topologův hřeben.

**3.2.** Co lze říci o $\mathbf{Z}$-modulu $M$ v přesné posloupnosti $0 \to M \to 0$?

**3.3.** Existuje barevné barycentrické rozdělení každého obarveného simpliciálního komplexu?

# Kapitola 4

# Aplikace algebraické topologie v asynchronních výpočtech

Materiál k této části je čerpán zejména z článku M. Herlihy, N. Shavit, The topological structure of asynchronous computability, *Journal of the ACM*, Vol. 46, No. 9, 1999. (Za tento článek dostali autoři v r. 2004 Gödelovu cenu; společně s autory jiného článku o aplikaci algebraické topologie v distribuovaných výpočtech.)

## 4.1 Rozhodovací úlohy

Máme $N = n+1$ nezávisle běžících procesů, které mají spolupracovat na řešení *rozhodovací úlohy*. Každý proces má vstupní hodnotu a jeho úkolem je vrátit (v konečném čase) výstupní hodnotu tak, aby společně s výstupními hodnotami ostatních procesů splňovala podmínky dané zadáním úlohy. Procesy mají k dispozici sdílenou paměť (pro čtení i zápis). Naším cílem je nalézt *protokol* (tj. program) řešící danou úlohu bez čekání. Situaci komplikuje, že některý z procesů může být chybný. V takovém případě nevrátí žádnou hodnotu.

Pro danou rozhodovací úlohu je *vstupní vektor* $N$-tice vstupních hodnot procesů. Některé (ne však všechny) hodnoty se mohou rovnat $\perp$, což značí, že se příslušný proces řešení úlohy neúčastní. Ke každému vstupnímu vektoru existuje několik (analogicky definovaných) *výstupních vektorů*, které určují, jakých výstupních hodnot mohou procesy při daném vstupu nabývat. Množinu vstupních vektorů pro danou úlohu budeme značit $I$, množinu výstupních vektorů $O$. Mezi těmito množinami máme relaci $\Delta$, která pro vstupní vektory určuje přípustné výstupní vektory. Vstupní vektory budeme značit $\iota$, výstupní $o$. Množina přípustných výstupních vektorů pro vstupní vektor $\iota$ je $\Delta(\iota)$. Definici pochopíme na příkladech.

**Příklad 4.1** (Unique-Id)**.** Každý proces $P_i$ má zadaný vstup $x_i = 0$ a má vybrat výstup $y_i \in \{0,\dots,n\}$ tak, aby různé procesy měly různé výstupy. Tabulka na Obr. 4.1 specifikuje úlohu pro tři procesy.

| $\iota$ | $\Delta(\iota)$ |
|---|---|
| $(0,\perp,\perp)$ | $(0,\perp,\perp),(1,\perp,\perp),(2,\perp,\perp)$ |
| $(\perp,0,\perp)$ | $(\perp,0,\perp),(\perp,1,\perp),(\perp,2,\perp)$ |
| $(\perp,\perp,0)$ | $(\perp,\perp,0),(\perp,\perp,1),(\perp,\perp,2)$ |
| $(0,0,\perp)$ | $(0,1,\perp),(1,0,\perp),(0,2,\perp),(2,0,\perp),(1,2,\perp),(2,1,\perp)$ |
| $(0,\perp,0)$ | $(0,\perp,1),(1,\perp,0),(0,\perp,2),(2,\perp,0),(1,\perp,2),(2,\perp,1)$ |
| $(\perp,0,0)$ | $(\perp,0,1),(\perp,1,0),(\perp,0,2),(\perp,2,0),(\perp,1,2),(\perp,2,1)$ |
| $(0,0,0)$ | $(0,1,2),(1,0,2),(0,2,1),(2,0,1),(1,2,0),(2,1,0)$ |

Obrázek 4.1: Úloha Unique-Id pro tři procesy

**Příklad 4.2** (Fetch-And-Inc)**.** Každý proces $P_i$ má zadaný vstup $x_i = 0$ a má vybrat výstup $y_i \in \{0,\dots,n\}$ jako v úloze Unique-Id. Navíc se na výstupu nesmí objevit číslo větší než $n$. Úloha pro tři procesy je specifikována v tabulce na Obr. 4.2.

| $\iota$ | $\Delta(\iota)$ |
|---|---|
| $(0,\perp,\perp)$ | $(0,\perp,\perp)$ |
| $(\perp,0,\perp)$ | $(\perp,0,\perp)$ |
| $(\perp,\perp,0)$ | $(\perp,\perp,0)$ |
| $(0,0,\perp)$ | $(0,1,\perp),(1,0,\perp)$ |
| $(0,\perp,0)$ | $(0,\perp,1),(1,\perp,0)$ |
| $(\perp,0,0)$ | $(\perp,0,1),(\perp,1,0)$ |
| $(0,0,0)$ | $(0,1,2),(1,0,2),(0,2,1),(2,0,1),(1,2,0),(2,1,0)$ |

Obrázek 4.2: Úloha Fetch-And-Inc pro tři procesy

**Příklad 4.3** (Binární konsensus)**.** Každý proces má vstupní hodnotu 0 nebo 1. Výstupní hodnota musí být pro všechny procesy stejná a musí to být jedna ze vstupních hodnot. Viz Obr. 4.3.

**Příklad 4.4** (Přejmenování)**.** Každý proces má na vstupu jedinečnou hodnotu z nějakého rozsahu $\{0,\dots,m\}$ a má pro výstup vybrat opět jedinečnou hodnotu ze zadaného menšího rozsahu.

| $\iota$ | $\Delta(\iota)$ |
|---|---|
| $(0,\perp)$ | $(0,\perp)$ |
| $(\perp,0)$ | $(\perp,0)$ |
| $(1,\perp)$ | $(1,\perp)$ |
| $(\perp,1)$ | $(\perp,1)$ |
| $(0,0)$ | $(0,0)$ |
| $(0,1)$ | $(0,0),(1,1)$ |
| $(1,0)$ | $(0,0),(1,1)$ |
| $(1,1)$ | $(1,1)$ |

Obrázek 4.3: Binární konsensus pro dva procesy

## 4.2 Topologické zadání rozhodovacích úloh

Nyní ukážeme způsob, jak zadat rozhodovací úlohu topologicky. Pro danou rozhodovací úlohu mějme množinu $M$ všech dvojic $(P,x)$, kde $P$ jsou procesy účastnící se výpočtu a $x$ přípustné vstupní hodnoty. To budou vrcholy abstraktního simpliciálního komplexu $\mathscr{I}$. Simplexy v $\mathscr{I}$ budou všechny podmnožiny množiny $M$, které určují přípustný vstupní vektor. Vrcholy v $\mathscr{I}$ jsou obarveny hodnotami $P$ (identifikátory jednotlivých procesů). Simpliciální komplex $\mathscr{I}$ nazveme *vstupním simpliciálním komplexem*.

*Výstupní simpliciální komplex*, bude abstraktní simpliciální komplex $\mathscr{O}$, vytvořený stejně jako komplex $\mathscr{I}$ ze dvojic $(P,y)$, kde $P$ jsou účastnící se výpočtu a $y$ přípustné výstupní hodnoty.

*Topologická specifikace úlohy* je pak podmnožina $\Delta \subseteq \mathscr{I} \times \mathscr{O}$, obsahující takové dvojice simplexů, které odpovídají přípustnému výstupu pro daný vstup.

Rozhodovací úlohu danou simpliciálními komplexy $\mathscr{I}$ a $\mathscr{O}$ a topologickou specifikací $\Delta$ značíme jako trojici $(\mathscr{I},\mathscr{O},\Delta)$.

**Příklad 4.5.** Na přednášce jste viděli topologické specifikace výše uvedených rozhodovacích úloh.

## 4.3 Hlavní věta

**Věta 4.1.** *K rozhodovací úloze $(\mathscr{I},\mathscr{O},\Delta)$ existuje protokol bez čekání se sdílenou pamětí, právě když existuje barevné rozdělení $\mathscr{I}'$ komplexu $\mathscr{I}$ a simpliciální zobrazení $f\colon \mathscr{I}' \to \mathscr{O}$ zachovávající obarvení a takové, že pro každý simplex $\sigma \in \mathscr{I}'$ je $f(\sigma) \in \Delta(\mathrm{carrier}(\sigma,\mathscr{I}))$.*

(Vysvětlení na přednášce.)