

Základy fuzzy logiky 1

Petr Osička

DAMOL

DATA ANALYSIS AND MODELING LAB

Palacky University, Olomouc, Czech Republic



INVESTMENTS IN EDUCATION DEVELOPMENT

Cíl přednášky

- seznámit vás s motivací pro vznik fuzzy logiky
- pojmy fuzzy množina, pravdivostní stupeň
- podrobněji popsat struktury pravdivostních hodnot

Neurčitost

- něco nevíme přesně, určitě, úplně.
- s neurčitostí se setkáváme v běžném životě i ve vědě
- existuje několik typů neurčitosti Příklad: nejistota je dána množina alternativ, nastat může jenom jedna. Neurčitost je v tom, že nevíme která existují (hod kostkou, ruleta ...)
- různé teorie pro zpracování neurčitosti (pravděpodobnost, possibility theory)
- neurčitost se vyskytuje i v situacích, kdy nemáme dostatek zdrojů (výpočetní síla, data, apod) abychom situaci (systém, fenomén) zpracovali přesně. Příklad: statistické zpracování dat.
- organized simplicity — disorganized complexity spektrum

Vágnost

- typ neurčitosti související s používáním přirozeného jazyka
- neostře definované pojmy, které přesně nevymezují svůj význam

Think of arm chairs and reading chairs and dining-room chairs, and kitchen chairs, chairs that pass into benches, chairs that cross the boundary and become settees, dentist's chairs, thrones, opera stalls, seats of all sorts, those miraculous fungoid growths that cumber the floor of arts and crafts exhibitions, and you will perceive what a lax bundle in fact is this simple straightforward term. In cooperation with an intelligent joiner I would undertake to defeat any definition of chair or chairishness that you gave me.

— H. G. Wells (First and Last Things, London, 1908)

- další příklady: mít vysoký tlak, být vysoký, rychle běžet, červená barva
- zákon vyloučeného třetího

Paradoxy

Na paradoxech lze demonstrovat důsledky použití aparátu pro přesné (ostře vymezené) výrazy na vágní výrazy.

Pracujeme s vágním výrokiem **nebýt plešatý** (NP). Můžeme předpokládat, že

- 1 Muž se 180 000 vlasy není plešatý (výrok $NP(180\,000)$ je pravdivý).
- 2 Pokud muži, který není plešatý, vytrhneme jeden vlas, nestane se plešatým. (pokud je $NP(x)$ pravdivý, pak je $NP(x - 1)$ také pravdivý).

Sestrojíme posloupnost pravdivých tvrzení:

$NP(180000), NP(179999), NP(179998), \dots, \mathbf{NP(0)}$

Došli jsme k paradoxu:

- elementární kroky jsou logicky správně (přepoklady 1 a 2)
- dojdeme k evidentně nesprávnému závěru (muž bez vlasů není plešatý)

Fuzzy množina

zobecňuje pojem množina = ostře vymezená kolekce objektů, **crisp množina**

Pro crisp množinu A v universu X ($A \subseteq X$) je **charakteristická funkce** zobrazení $A : X \rightarrow \{0, 1\}$ definované pro $x \in X$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \text{ tj. výrok „}x \text{ patří do } A\text{“ je pravdivý} \\ 0 & x \notin A, \text{ tj. výrok „}x \text{ patří do } A\text{“ není pravdivý} \end{cases}$$

Neostře vymezenou kolekci objektů definujeme tak, že umožníme objektům náležet do množiny ve stupních, tj. charakteristická funkce má tvar $A : X \rightarrow L$. Pro $b \in L$

$$A(x) = b \begin{cases} x \text{ patří do množiny } A \text{ ve stupni } b \\ \text{výrok „}x \text{ patří do } A\text{“ je pravdivý ve stupni } b \end{cases}$$

A nazýváme **fuzzy množina**.

L je množina **pravdivostních stupňů**, často volíme $[0, 1]$

Myšlenku více pravdivostních stupňů lze snadno použít i v matematické logice, pravdivostní funkci fuzzy množiny můžeme interpretovat jako **predikát**.

Predikát = funkce, která přiřazuje objektům (nebo n-ticím objektů) pravdivostní stupeň. Příklady predikátů:

vysoký-muž: Muži $\rightarrow L$. Použití: vysoký-muž(prof. Bělohlávek) = 1,

vysoký-muž(dr. Outrata) = 0.5

podobné-barvy: Barvy \times Barvy $\rightarrow L$. Použití: podobné-barvy(bílá, černá) = 0,

podobné-barvy(azurová, modrá) = 0.8

Predikáty lze pomocí logických spojek skládat do **logických formulí**:

$$\varphi := \text{Vysoky-muž}(x) \ \& \ \text{Vysoky-tlak}(x)$$

Formule: „muž x je vysoký a má vysoký tlak“. V závislosti na tom, koho doplníme za x má formule nějakou pravdivostní hodnotu. (ozn. $\|\varphi\|$)

Řešení paradoxů

$NP(x)$ můžeme brát jako charakteristickou funkci crisp množiny „muži, kteří nejsou plešatí“

Pokud je NP fuzzy množina s $L = [0, 1]$, pak můžeme paradox vyřešit následovně:

- 1 Muž se 180000 vlasy není plešatý: $NP(180000)=1$.
- 2 Pokud vytrhneme muži vlas, bude o malinko plešatější: pokud $NP(x) = a$, pak $NP(x - 1) = a - \frac{1}{180000}$

Posloupnost $NP(x)$ pro $x = 180000, 179999, \dots, 0$:

$$NP(180000)=1, NP(179999)=\frac{179999}{180000}, \dots, NP(0) = 0$$

Komparativní sémantika

Kde vezmu hodnoty pravdivostních stupňů?

Záleží na tom, jestli je $\text{byt-vysoky}(\text{Franta}) = 0.5$ nebo $\text{byt-vysoky}(\text{Franta}) = 0.45$?

- 1 Pravdivostní stupně mají komparativní význam
- 2 Konkrétní pravdivostní stupně získáme např. od odborníků a mohou být důležité v aplikacích (např. fuzzy regulátorech)

Při volbě pravdivostních stupňů tedy záleží hlavně na tom, aby správně popisovaly konkrétní množinu (Např. byt-vysoky má vyšší pravdivostní stupeň pro někoho, kdo má 2m, než pro někoho, kdo má 170 cm)

V konkrétních aplikacích (při zpracování fuzzy množin), lze pak stupně doladit tak, jak je pro danou aplikaci vhodné.

Množina pravdivostních stupňů

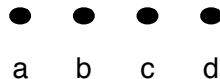
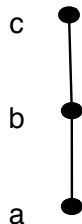
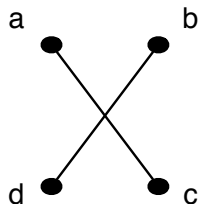
Pro L existují rozumné požadavky, ze kterých vyplyne příslušná formalizace:

1. Chceme porovnávat pravdivost různých výroků

Definice

Uspořádaná množina je $\langle L, \leq \rangle$, kde A je množina a pro všechny $x, y, z \in L$ platí

- $x \leq x$ (reflexivita)
- $x \leq y$ a $y \leq x$ implikuje $x = y$ (antisymetrie)
- $x \leq y$ a $y \leq z$ implikuje $x \leq z$ (tranzitivita)



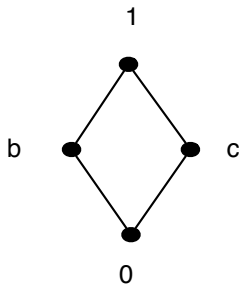
Množina pravdivostních stupňů

2. Úplná pravda je větší než všechny ostatní pravdivostní stupně, úplná nepravda je menší než všechny pravdivostní stupně

Definice

Uspořádaná množina $\langle L, \leq \rangle$ je **ohraničená** pokud existují prvky $0, 1$ takové, že

- $0 \leq x$ pro všechna $x \in L$ (0 je nejmenší prvek)
- $x \leq 1$ pro všechna $x \in L$ (1 je největší prvek)



Množina pravdivostních stupňů

3. Kvantifikátory = symboly používané ve formulích matematické logiky

Universální kvantifikátor \forall — význam „pro všechny“:

$$\varphi := (\forall x) \text{Vysoky-tlak}(x)$$

Význam: pro všechna možná dosazení za x platí, že x má vysoký tlak, tj. „všichni muži mají vysoký tlak“

Jak dostaneme pravdivostní hodnotu φ ?

- $\text{vysoký-tlak}(x) \geq \|\varphi\|$ pro všechna dosazení za x
- chceme, aby $\|\varphi\|$ bylo co největší možné
- největší pravdivostní stupeň menší než všechna $\text{vysoký-tlak}(x)$
- přirozeně vede na pojem infimum

Definice

Nechť $\langle L, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $B \subseteq L$. **Dolní kužel** $\mathcal{L}_L(B)$ množiny B vzhledem k A je

$$\mathcal{L}_L(B) = \{a \in L \mid a \leq b \text{ pro všechny } b \in B\}.$$

Pokud má $\mathcal{L}_L(B)$ největší prvek, nazýváme jej **infimem** B . Operaci nalezení infima říkáme *průsek*, označujeme \wedge .

Množina pravdivostních stupňů

Existenční kvantifikátor \forall — význam „existuje alespoň jeden“:

$$\varphi := (\forall x) \text{Vysoky-tlak}(x)$$

Význam: pro všechna možná dosazení za x platí, že alespoň jedno x má vysoký tlak, tj. „existuje muž, který má vysoký tlak“

Jak dostaneme pravdivostní hodnotu φ ?

- $\text{vysoký-tlak}(x) \leq \|\varphi\|$ pro všechna dosazení za x
- chceme, aby $\|\varphi\|$ bylo co nejmenší možné
- nejmenší pravdivostní stupeň větší než všechna $\text{vysoký-tlak}(x)$
- přirozeně vede na pojem supremum

Supremum

Definice

Nechť $\langle L, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $B \subseteq L$. **Horní kužel** $\mathcal{U}_L(B)$ množiny B vzhledem k A je

$$\mathcal{U}_L(B) = \{a \in L \mid a \geq b \text{ pro všechny } b \in B\}.$$

Pokud má $\mathcal{U}_L(B)$ nejmenší prvek, nazýváme jej **supremem** B . Operaci nalezení supremem říkáme **spojení**, označujeme \vee .

Konjunkce

4. Pravdivostní hodnoty složených formulí se počítají z pravdivostních hodnot jejich podformulí

$$\varphi := \text{Vysoky-muž}(x) \ \& \ \text{Vysoky-tlak}(x)$$

Kolik je $\|\varphi\|$, když $\text{vysoky-muž}(x) = b$, a $\text{vysoky-tlak}(x) = c$?

Použijeme **pravdivostní funkci**, která odpovídá spojce $\&$ — $\otimes : L \times L \rightarrow L$.

$\|\varphi\|$ nyní spočítáme jako $b \otimes c$.

Definice (Pravdivostní funkce spojky $\&$)

Funkci \otimes považujeme za pravdivostní funkci spojky $\&$, pokud pro všechna $a, b, c \in L$

- $a \otimes b = b \otimes a$
- $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
- $a \otimes 1 = a$

Implikace

Pravdivostní funkce implikace : \rightarrow

Chceme, aby dobře fungovalo pravidlo *modus ponens*

z φ a $(\varphi \Rightarrow \psi)$ odvod' ψ

Požadavky ve vícehodnotovém prostředí:

- 1 $\|\varphi\| \otimes (\|\varphi\| \rightarrow \|\psi\|) \leq \|\psi\|$
- 2 přitom ale chceme, aby *modus ponens* bylo silné pravidlo, tj. chceme aby pravdivostní hodnota $\|\varphi\| \otimes (\|\varphi\| \rightarrow \|\psi\|)$ byla maximální možná

Požadavky vedou na podmínku adjunkce:

Pro všechna $a, b, c \in L$

$$a \otimes b \leq c \text{ právě když } a \leq b \rightarrow c$$

Residuovaný svaz

Definice (Svaz)

Úplný svaz je spořádaná množina (L, \leq) , ve které existují infima a suprema pro všechny podmnožiny L .

Definice (Residuovaný svaz)

Residuovaný svaz je algebra $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1, \otimes, \rightarrow \rangle$ taková, že

- $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je ohraničený úplný svaz
- \otimes je komutativní, asociativní a pro všechna $a \in L$ platí $a \otimes 1 = 1$
- $a \otimes b \leq c$ právě když $a \leq b \rightarrow c$

Příklady residuovaných svazů

Často používanými residuovanými svazy jsou svazy s nosičem $L = [0, 1]$.

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ tvoří úplný svaz, kde $a \wedge b = \max(a, b)$ a $a \vee b = \min(a, b)$.

Operace multiplikace a residua jsou v něm definovány:

- $a \otimes b = \max(a + b - 1, 0)$, $a \rightarrow b = \min(1 - a + b, 1)$ (Lukasiewitzova struktura)

- $a \otimes b = \min(a, b)$, $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$ (Gödelova struktura)

- $a \otimes b = a \cdot b$, $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b/a & a > b \end{cases}$ (produktová struktura)

Příklady residuovaných svazů

Definice (t-norma)

Zobrazení $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je **t-norma**, když pro všechna $x, y, z \in [0, 1]$ platí:

- $T(x, y) = T(y, x)$
- $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$
- $x \leq y$ implikuje $T(x, z) \leq T(y, z)$
- $T(x, 1) = x$

Lze použít jako \otimes v residuovaném svazu, pokud je t-norma zleva spojitá, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(a_n, b) = t(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b)$$

Pak totiž existuje unikátní operace \rightarrow tak, že $(\otimes$ a $\rightarrow)$ tvoří adjungovaný pár.

Základní vlastnosti residuovaných svazů

Věta (Základní vlastnosti \otimes , \rightarrow)

V každém residuovaném svazu \mathbf{L} platí pro všechna $x, y \in L$:

- 1 $y_1 \leq y_2$ implikuje $x \otimes y_1 \leq x \otimes y_2$,
- 2 $x \otimes (x \rightarrow y) \leq y$,
- 3 $x \rightarrow y$ je největší prvek $\{z \mid x \otimes z \leq y\}$
- 4 $x \leq y$ p.k. $x \rightarrow y = 1$,
- 5 $x \rightarrow x = 1$, $x \rightarrow 1 = 1$, $0 \rightarrow x = 1$,
- 6 $1 \rightarrow x = x$,
- 7 $x \otimes y \leq x$,
- 8 $x \otimes 0 = 0$,

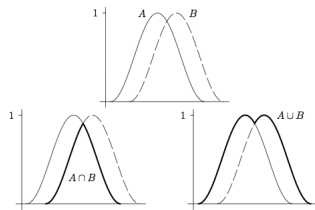
Průnik a sjednocení fuzzy množin

Průnik fuzzy množin $A, B \in L^X$ je fuzzy množina $A \cap B$, definovaná

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x).$$

Sjednocení fuzzy množin $A, B \in L^X$ je fuzzy množina $A \cup B$

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x).$$



Podmnožiny

Pro fuzzy množiny $A, B \in L^X$ je **stupeň, ve kterém je A podmnožinou B** , definován

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \rightarrow B(x))$$

Crisp varianta:

$A \subseteq B$ právě když $A(x) \leq B(x)$ pro všechna $x \in X$

Je vidět, že

$A \subseteq B$ právě když $S(A, B) = 1$